Ch9 DVR 和 Dedekind 整环

命题. A. 维数1的诺特整环
则 每个非零 理想 α 可写成(唯一)
准素理想的 乘积.(其根互不相同)

证: ∵ A 诺特. $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ 极小准素分解.

∵ $\dim A = 1$. 每个非零素 即 极大

∴ $p_i + p_j = (1)$
$\Rightarrow q_i + q_j = (1)$
∴ $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n} q_i$

另外 若 $\alpha = \prod q_i$. $\Rightarrow \alpha = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$
∵ q_i 是 孤立 准素分支
∴ 仅由 α 唯一确定

若上述 A. 取 ⊃P 素
A_p 仅有一个 ⊃素理想
此时. 据上述 理论.
每个非零理想, 是 极大理想 pA_p 的方幂
(应该要要求 准素理想也是 极大的方幂?)

DVR.
K 为域. K上的离散赋值. v
$v: K\setminus\{0\} \to \mathbb{Z}$ 群同态,
$$\begin{cases} v(xy) = v(x) + v(y) \\ v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)) \end{cases}$$

集合 $\{0\} \cup \{x \in K^* \mid v(x) \geq 0\}$
构成 K 的赋值环
$v(0)$ 可延伸定义为 $+\infty$

例 (1) $\mathbb{Q}$. 对固定的 p.
$x \in \mathbb{Q}$ 可写成 $p^a y$ $(a \in \mathbb{Z})$
$v_p: x \longmapsto a$
其赋值环 $V_p = \{0\} \cup \{x \mid v_p(x) \geq 0\} =: \mathbb{Z}_{(p)}$
是局部环

(2) $K = k(x)$. 有域. x 未定元
① $f \in k[x]$ 不可约
同上. $g(x) = f(x)^a \cdot h(x)$
$v: g(x) \longmapsto a$
② $O_\infty = \{\frac{f}{g} \mid \deg g \geq \deg f\}$
$v_\infty(\frac{f}{g}) = \deg g - \deg f$

对整环 A. 称为 离散赋值环
若 A 是 Frac A 的 赋值环. 态射为 v
由 ch5. A是局部环, 其极大理想是 $\{v(x) > 0\}$

对 $v(x) = v(y) \Rightarrow v(xy^{-1}) = 0$
$\Rightarrow xy^{-1}$ 为单位 $\Rightarrow (x) = (y)$

$\alpha \subseteq A$ 中理想. $k = \min(v(\alpha))$
则 设 $v(x) = k$. ∀ y. $v(y) \geq k \Rightarrow y \in \alpha$
$\Rightarrow$ 记 $m_k = \{y \in A \mid v(y) \geq k\}$
$m \supseteq m_2 \supsetneq m_3 \supsetneq \cdots$ 故 不满足 dcc
∴ A 仅是诺特环

对 $v(x) = 1$. $\Rightarrow m = (x)$ $\Rightarrow m_k = (x^k)$
($\alpha x^k \in m_k$. 另外. $y \in m_k$.
$v(y) \geq k \Rightarrow v(yx^{-k}) \geq 0 \Rightarrow yx^{-k} \in A$
$\Rightarrow y \in (x^k)$)

因此. m 是 唯一非零素理想
$\Rightarrow$ A 是 诺特 局部整环. $\dim = 1$
每个 理想 是 极大理想的幂次.

命题. A. $\dim=1$ 的诺特局部整环. m 极大理想 下述等价

(1) A 是 DVR

(2) A 整闭

(3) m 是主理想

(4) $\dim_{A/m}(m/m^2)=1$

(5) 所有非零理想 是 m 的幂次

(6) $\exists x\in A$. 所有非零理想是 (x^k) 形式

证. 引理1. $\alpha\neq 0$. A, 则 α 为 m-准素

则 $\exists n$. $\alpha\supseteq m^n$

$\because$ m 是唯一素. ($\neq 0$)

$\alpha=\cap q_i$ $\Rightarrow$ α 是 m 准素

$\Rightarrow$ 利用诺特性质 $\exists n$

$r(\alpha)^n\subseteq\alpha\subseteq r(\alpha)$

引理2. $\forall n\geq 0$. $m^n\neq m^{n+1}$

(1) $\Rightarrow$ (2) 利用赋值环性质

(2) $\Rightarrow$ (3) $0\neq a\in m$.. $\exists n$: $m^n\subseteq(a)$, $m^{n-1}\not\subseteq(a)$

取 $b\in m^{n-1}$ $b\notin(a)$

$\because$ $x=\frac{a}{b}\notin A$ $\Rightarrow$ x^{-1} 在 A 上不整 ($\because A$ 整闭)

若 $x^{-1}m\subseteq m$

则 m 成为忠实 $A[x^{-1}]$ 模

由 Ch5 结论1. x^{-1} 在 A 上整. 矛盾

$\Rightarrow$ $x^{-1}m\not\subseteq m$

再由 $x^{-1}m\subseteq A$

($bm\subseteq m^n\subseteq(a)$

$\Rightarrow a^{-1}bm\subseteq a^{-1}(a)=A$

$\Rightarrow x^{-1}m\subseteq A$)

$\Rightarrow x^{-1}m=A$ $\Rightarrow$ $m=Ax=(x)$

(3) $\Rightarrow$ (4) ≤ 1 显然, 若 $=0$ 则与引理2矛盾

(4) $\Rightarrow$ (5) $\exists n$ $\alpha\supseteq m^n$

在 A/m^n 中. $\because m/m^n$ 为主理想

m/m^n 为唯一素理想 ; A/m^n 为 Artin 局部环

$\Rightarrow$ α/m^n 为主理想

$\alpha/m^n=(m/m^n)^k=(\bar{m}^k)$

(5) $\Rightarrow$ (6) $\because m^2\neq m$

$\Rightarrow\exists x\in m$. $x\notin m^2$

$(x)=m^r$ $\Rightarrow$ $r=1$

$\Rightarrow(x^k)=m^k=(x^k)$

(6) $\Rightarrow$ (1) $(x)=m$

若 $0\neq a$. $(a)=(x^k)$ 此 k 仅由 a 决定

$\Rightarrow$ $v: a\mapsto k$

$v(ab^{-1})=v(a)-v(b)$

v 是良好定义的离散赋值.

Dedekind 整环

Thm. A 是诺特整环. 维数为1. 下述等价

(1) A 整闭

(2) A 的准素 是素的幂次

(3) $p\neq 0$. A_p 是 DVR

证 (1) $\Leftrightarrow$ $\forall p$. A_p 整闭, 又 A_p 为维数1的诺特局部整环

$\Leftrightarrow$ A_p 为 DVR $=$(3)

(2) $\Rightarrow$ (3) A_p 仅一个素/极大

$\Rightarrow$ 每一个 $S^{-1}\alpha$. 为 pA_p 准素

$\because$ 准素 $\alpha\subseteq A$ 为素的幂

$\Rightarrow$ $S^{-1}\alpha$ 为素的幂

$\Rightarrow$ A_p 为 DVR

(3) $\Rightarrow$ (2) A_p DVR $\Rightarrow$ A_p 的非零理想是极大理想幂次

$S^{-1}\alpha=(S^{-1}p)^n$

$(S^{-1}\alpha)^c=\alpha$ 准素,

$\alpha=p^n$

满足上述定义的称为 Dedekind 整环

推论：D.D. 的每个理想
可唯一分解成素理想乘积

$\alpha = \prod q_i = \prod p_i^{e_i}$ □

例(1) PID 是 D.D
∵ A是诺特，维数为1.
且 A_p 是 PID、局部环 ⇒ DVR
⇒ A是 D.D

(2) O_K 为代数数域 是 D.D
$\mathbb{Q}(i)$，$\mathbb{Z}[i]$
其"整数"环 是 $\mathbb{Z}$ 在 K 的闭包.

Thm. 代数数域 K 的整数环A是 D.D

证 K 为 $\mathbb{Q}$ 的可分扩张
因此 存在 $K/\mathbb{Q}$ 的基 $v_1 \cdots v_n$
$A \subseteq \sum \mathbb{Z} v_j$
因此 A是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模 ⇒ 诺特
⇒ A 整闭
∀ p 为 A中素
由 $0 \subsetneq p$
$p \cap \mathbb{Z} \neq 0$ ⇒ $p \cap \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$中极大
⇒ p 是 A中极大 □

注 对 D.D
非素分解 可变成 素理想乘积分解

分式理想：
A 为整环. $K = \mathrm{Frac}A$.
$M \subseteq K$ 为 K 的 A-模子模
M 称为分式理想 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x \underset{\in A}{\neq 0}.\ xM \subseteq A$
整理想为 A的理想 为分式一
$u \in K$，$(u) = Au$ 称为主理想

有限生成 A模 $\subseteq K$ 为分式理想
$\left(M = \langle \frac{y_1}{x_1} \cdots \frac{y_n}{x_n} \rangle = \frac{\langle y_1' \cdots y_n' \rangle}{x} \right)$

若 A 为诺特环
则 分式理想为有限生成理想
$\left(xM \subseteq A.\quad \begin{array}{l} xM = \langle x_1 \cdots x_n \rangle \\ \Rightarrow M = \frac{\langle x_1 \cdots x_n \rangle}{x} \end{array} \right)$

M 称为可逆理想.
如果. $\exists\ N \subseteq K$ 为 K的A-子模
使得. $M \cdot N = A$

注：若 N 存在. 则唯一. 且 $= (A:M)$
$\left(\because\ N \subseteq (A:M) = (A:M)\ M \cdot N = A \cdot N = N \right)$

M 可逆 ⇒ M 是有限生成 A模
利用 $M \cdot (A:M) = A$
$\exists\ x_i \in M.\ y_i \in (A:M)$
$\sum x_i y_i = 1$
$\Rightarrow \forall x \in M.\quad x = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) x = \sum_{i=1}^{n} (x y_i) x_i$
故 M 由 $\langle x_1 \cdots x_n \rangle$ 生成

显然 (u) 是可逆理想. 其逆为 (u^{-1})
可逆理想的集合 在乘法下构成群
恒等元是 $A = (1)$
$\left(A, B \text{可逆.} \Rightarrow AB^{-1} \in \text{(群)} \right.$
$\left. ((AB^{-1}) BA^{-1} = A \right)$

可逆性是局部性质

命题. M是分式理想 下列等价

(1) M 可逆

(2) M 有限生成 且 $\forall\, p$素, M_p 可逆

(3) M 有限生成 且 $\forall\, m$极大 M_m 可逆

(1)⇒(2): $A_p = \left(M\cdot(A:M)\right)_p = M_p\cdot(A_p:M_p)$

(3)⇒(1) $\alpha = M\cdot(A:M)$ 是 A中理想

$\forall\, m$极大

$\alpha_m = M_m\cdot(A_m:M_m) \overset{\text{利用(3)}}{=} A_m$

若 α为真理想 $\alpha\subseteq m$

$\alpha_m = A_m$ 不可能成立 $\Rightarrow \alpha = A$ □

命题. A是局部环. 则 A是DVR ⇔ 每个非零分式理想是可逆的

"⇒" 设 $m = (x)$

M为分式理想

$\Rightarrow yM \subseteq A$. $\Rightarrow yM = (x^r)$

$\Rightarrow M = (x^{r-v(y)})$

"⇐" 可逆 ⇒ 有限生成

⇒ 整理想 有限生成 ⇒ A 诺特

下证. 每个非零整理想为 m 的幂次

$\Sigma = \{\alpha \subseteq A \mid \alpha$不是$m$的幂次$\}$

极大元. $\alpha\in\Sigma$

$\because \alpha\neq m \Rightarrow \alpha\subsetneq m$

$\Rightarrow m^{-1}\alpha \subset m^{-1}m = A \Rightarrow m^{-1}\alpha$ 为A的~

又 由 $A\subseteq(A:M) = m^{-1}$

$\Rightarrow \alpha = A\alpha \subseteq m^{-1}\alpha$

$\Rightarrow \underbrace{m^{-1}\alpha = \alpha}_{\alpha = m\alpha}$ 或 $m^{-1}\alpha\notin\Sigma$

$\alpha = m\alpha$ ⇒由Nakayama 知 $\alpha = 0$

若 $m^{-1}\alpha\notin\Sigma$. $m^{-1}\alpha$ 是 m的幂次

⇒ α是m的幂次. 矛盾

□

Thm. A是整环

A为D.D ⇔ 每个非零分式理想可逆

"⇒" M 和为分式理想

$\because A$为诺特 ⇒ M 有限生成

⇒ M_p 有限生成 ⇒ M_p 是分式理想

在 A_p 为DVR中 M_p 可逆.

⇒ M 可逆

"⇐" A是诺特的

只证 分式~ ⇔ 整~

下证 A_p 是DVR

只需证 A_p中的非零整理想可逆

取 b为 A_p 的非零分式理想

$\alpha = b^c = b\cap A$ 是A的非零分式理想

由条件. α可逆

故 $b = \alpha_p$ 可逆

故 A_p 是 DVR

推论 若A为D.D 则 每个非零分式理想 形式 理想群 □

理想群 I 是自由Abel群

由 非零素理想 生成