Artin 环

命题. Artin 环. 素 = 极大

p. 素 A/p 整环 $x\in A/p$

$(x)\supseteq(x^2)\supseteq\cdots\quad(x^n)=(x^{n+1})\cdots$

$x^n=x^{n+1}y\Rightarrow xy=1\Rightarrow$ 域

推论 $\mathrm{nil}\,A=\mathrm{Jac}\,A$

命题. Artin 环只有有限多极大/素,

$\Sigma=\{m_1\cap\cdots m_n\cap\cdots \mid$ 有限. 极大的交$\}$

$m\in\Sigma.\Rightarrow\Sigma\neq\phi$

设 $m_1\cap\cdots\cap m_n$ 极小元

$\forall m$ 极大 $m\cap(m_1\cap\cdots\cap m_n)=m_1\cap\cdots\cap m_n$

$\Rightarrow m\supseteq m_1\cap\cdots\cap m_n$

$\Rightarrow m\supseteq m_i\Rightarrow m=m_i$ $\square$

命题 Artin环. $\mathrm{nil}\,A$ 幂零

$\mathrm{nil}\,A\supseteq\cdots\supseteq(\mathrm{nil}\,A)^k=(\mathrm{nil}\,A)^{k+1}=\alpha$

若 $\alpha\neq0$

$\Sigma=\{b\subseteq A\mid \alpha\cdot b\neq0\}$

$\because\alpha^2=\alpha\neq0\Rightarrow\Sigma\neq\phi$

极小元 $C.\neq0$

$x\in C.\quad(x)\subseteq C\Rightarrow(x)=C$

$(x\alpha)\cdot\alpha=x\alpha^2=x\alpha\neq\phi$

$\therefore x\alpha\subseteq(x)\Rightarrow x\alpha=(x)$

$\Rightarrow x=xy\quad(y\in\alpha)$

$\Rightarrow x=xy=xy^n\quad\forall n$

$\because y\in\alpha=(\mathrm{nil}\,A)^k\Rightarrow y^m=0$

$\Rightarrow x=0\Rightarrow C=0$ 矛盾 $\square$

定义 A的"维数"

$n=\sup\{m\mid p_0\subsetneq p_1\subsetneq\cdots\subsetneq p_n,\ p_i$ 素$\}$

最长的素链.

例. 域: $\dim=0$. $\mathbb{Z}$. $\dim=1$.

Thm. A 为 Artin $\Leftrightarrow$ A 诺特且 $\dim A=0$

"$\Rightarrow$" $\dim A=0$ 显然,

取 $m_i\ (1\le i\le n)$ 为不同的极大理想

$\prod_{i=1}^{n} m_i^k\subseteq(\bigcap_{i=1}^{n} m_i)^k=(\mathrm{nil}(A))^k=0$

$\therefore$ 由前 (6.11). A 诺特

"$\Leftarrow$" 0 有准素分解

$0=\bigcap_{j=1}^{n} q_j$

属于 0 的极小素理想有限.

$\Rightarrow$ A 的极大理想 = 属于 0 的极小素,

$\Rightarrow \mathrm{nil}=\bigcap_{i=1}^{m} m_i,\quad(\mathrm{nil})^k=0$

$\Rightarrow(\prod_{i=1}^{m} m_i)^k\subseteq(\bigcap_{i=1}^{m} m_i)^k=0$

$\therefore\prod_{i=1}^{m} m_i^k=0$ 由 (6.11). A为Artin.

Artin 局部环:

命题. A 为诺特局部环. m 极大

则下述命题刚好只成立一个

(1) $m^n\neq m^{n+1}\quad\forall n$

(2) $\exists n.\ m^n=0$ 此时 A为 Artin 局部环

若 (1) 不成立 $\Rightarrow\exists n,\ m^n=m^{n+1}$

$\because m=\mathrm{Jac}\Rightarrow$ Nakayama $m^n=0$

由上定理. 只需证 $\dim A=0$

即证 $0\subsetneq p\subseteq m.$ 有 $p=m$

$\because m^n=0\subseteq p\subseteq m$

$\Rightarrow$ 取根 $p=m$ $\square$

Thm. Artin环的结构定理.

A 可唯一(同构)写成 Artin局部环的直积

设 m_i $(1\le i\le n)$ 为极大

$\exists k.\quad \prod m_i^k = 0$

$\because (1) = m_i + m_j = r(m_i^k + m_j^k)$

$\Rightarrow m_i^k + m_j^k = (1)$

$\Rightarrow \bigcap m_i^k = \prod m_i^k = 0$

$\varphi_1\quad A = A/\bigcap m_i^k \cong \prod A/m_i$

又 A/m_i^k 为 Artin局部环 (m_i 为唯一极大)

$((\bar{m_i})^k = \bar{0} \Rightarrow \bar{m_i} \subseteq nil() \Rightarrow m_i$)

唯一性. $A \cong \prod_{i=1}^{n} A_i$. A_i 为 Artin局部环

$\phi_i: A \twoheadrightarrow A_i$ 满

$\alpha_i = \ker\phi_i$. $A/\alpha_i \cong A_i$

由 α_i 与 α_j 互素 (1.10)

又 $\bigcap \alpha_i = 0$

要证 A_i 唯一 $\Rightarrow$ 证 α_i 唯一

$\Rightarrow$ 证 $\sqrt{\alpha_i}$ 为 0 的孤立素理想

再由第2唯一性定理得证

取 A_i 的唯一素 q_i

$p_i = \phi_i^{-1}(q_i) \subseteq A$ 为素, $\Rightarrow$ 极大

又 q_i 幂零 $\Rightarrow q_i^k = 0$

$\Rightarrow p_i^k = \varphi_i^{-1}(q_i^k) = \varphi_i^{-1}(0) = \alpha_i$

又 p_i 极大 $\Rightarrow$ α_i 为 p_i-准素

又 $\sqrt{\alpha_i} = p_i$ 为极大 且 α_i 两两互素

$\Rightarrow p_i$ 两两互素

$\Rightarrow \alpha_i$ 为孤立准素分支

由 2nd 唯一性定理 $\Rightarrow \alpha_i$ 唯一確定

□

A 局部环. m 极大 $A/m = k$ 域

m/m^2 作为 k-线性空间

若 m有限生成 则 m的生成元生成 m/m^2

$\Rightarrow \dim_k m/m^2$ 有限

命题. A 为 Artin局部环. 下列等价

(1) A中理想 主理想

(2) 极大理想 主理想

(3) $\dim_k m/m^2 \le 1$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) ✓

(3) $\Rightarrow$ (1) 若 $\dim_k m/m^2 = 0$

$\Rightarrow m = m^2$ 由 $m = Jac$

$\Rightarrow m = 0 \Rightarrow A$为域

若 $\dim_k m/m^2 = 1$

则 m只能为主理想 $m = (x)$

$\forall$ 取 $(0) \subseteq \alpha \subsetneq (1)$

$\because$ m 唯一极大 . $m^n = 0$

$\Rightarrow \exists r.\quad \alpha \subseteq m^r.$
$\alpha \not\subseteq m^{r+1}$

$\therefore y \in \alpha.\quad y = ax^r$

$\because ax^r \notin m^{r+1}$

$\Rightarrow a \notin m \Rightarrow a$ 可逆

$\Rightarrow x^r = a^{-1}y \in \alpha$

$\Rightarrow (x^r) \subseteq (\alpha) \subseteq m^r = (x^r)$

$\therefore \alpha = (x^r)$ 主理想 □