ch7. 诺特环

命题. $\phi: A \twoheadrightarrow B$ 满

则 A诺特环 $\Rightarrow$ B诺特环

证 B是诺特A模 $\Rightarrow$ B是诺特B模

命题. $A \subseteq B$ 子环

A诺特. B有限生成A模

则 B是诺特环

证. $B = A[x_1, \cdots x_n]$ (环)

$\cong A^n/_{Ker}$ (模)

$\therefore$ B 是诺特A模 $\Rightarrow$ B是诺特 B模

例 $\mathbb{Z}[i]$ 由上知. 是诺特环.

更一般地 $\mathcal{O}_K \subseteq \sum \mathbb{Z} v_j$ 也是诺特环

命题: A诺特环. S 乘性子集

则 $S^{-1}A$ 诺特环

证. A诺特 $I \subseteq A$ 由 $(x_1, \cdots x_n)$ 生成

$S^{-1}I$ 由 $\frac{x_1}{1}, \cdots \frac{x_n}{1}$ 生成

推论. A诺特环. 则 A_p 诺特环

Thm. Hilbert Basis Theorem

证. $\alpha \subseteq A[x]$ 首项系数 $I \subseteq A$. $I = (a_1, \cdots a_n)$

则 $\exists f_i$ $f_i(x) = a_i x^{r_i}$ 低次项

取 $r = \max r_i$ $\{f_i(x)\}$生成理想 $\alpha' \in \alpha$

设 $f = ax^m + (\text{低}) \in \alpha$

若 $m > r$ 则可降次

故可设 $f = g + h$ $\deg g < r$, $h \in \alpha'$

取 $M = \langle 1, x, \cdots x^{r-1} \rangle$

为有限生成 A模

$\therefore$ 由 $\alpha = (\alpha \cap M) + \alpha'$

$\therefore$ α 有限生成 $A[x]$ 模

(理想)

推论. A诺特环 $\Rightarrow$ $A[x_1, \cdots x_n]$ 诺特环

推论 B有限生成A代数，若A诺特环
则B也是诺特环

证 由 $B = A[x_1,\dots,x_n]$，即得.

命题. $A\subseteq B\subseteq C$ 环，A诺特
C是有限生成A代数 且
C 有限生成B模 (1) / 在B上整 (2)
则 B是有限生成A代数

证 (1)(2) 在此情况下等价
设 $C = A[x_1,\dots,x_m]$ 作为A代数
$C = B[y_1,\dots,y_n]$ 作为B模

$x_i = \sum_j b_{ij} y_j$ ($b_{ij}\in B$) (1)

$y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k$ ($b_{ijk}\in B$) (2)

取 $B_0 = A[b_{ij}, b_{ijk}]$ 作为A代数
∵ A诺特 ⇒ B_0诺特，且 $A\subseteq B_0\subseteq B$
∀ $c\in C$ 是 x_i 的多项式 系数 $\in A$
∴ ∀ $c\in C$ 可由 y_j 的线性表示
系数 $\in B_0$
∴ C为有限生成 B_0 模
(~~B_0诺特 ⇒ C是诺特B_0模~~)
又 $B\subseteq C$ (作为 B_0 子模)
⇒ B是诺特 B_0 模
⇒ B是有限生成 B_0 模
又 B_0是有限生成A代数
⇒ B是有限生成A代数

命题. k域，E有限生成k代数，
若E是域 则E是k的有限代数扩张

证. 设 $E = k[x_1,\dots,x_n]$ 若E不是代数扩张
取 $x_1,\dots,x_r$ 在k上代数独立 (x_i 在 $k(x_1,\dots,x_{i-1})$ 上超越)
$x_{r+1},\dots,x_n$ 在 $k(x_1,\dots,x_r)$ 上代数
取 $F = k(x_1,\dots,x_r)$
则 E是F的有限代数扩张
因此是有限生成F模
由前述命题 $k\subseteq F\subseteq E$
则 F是有限生成k代数
$F = k[y_1,\dots,y_s]$　$y_j = \frac{f_j}{g_j}$　f_j, g_j 为 $x_1\cdots x_r$ 的多项式

因为有无限多不可约多项式 $\in k[x_1,\dots,x_r]$
因此 ∃ h 与 g_j 互素
(例如 $h = \prod g_j + 1$)
因此 $\frac{1}{h}$ 不能写成 y_i 的线性和 ...
由此有矛盾.
故有限代数扩张.

推论 k域. A有限生成k代数
m为A极大理想
则 A/m 是k的有限代数扩张
特别地，k代数封闭 ⇒ $A/m\cong k$

证、取 $E = A/m$
∵ $A = k[x_1,\dots,x_n]$ k代数
∴ $E = k[\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n]$ k代数
利用上命题 得证

诺特环上的准素分解

不可约理想 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$ 则 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ 或 $\mathfrak{a}=\mathfrak{c}$

引理1. 诺特环 A. 每个理想都是有限不可约理想的交

反证: $\underset{\neq\phi}{\Sigma}=\{\alpha \mid \alpha \subseteq A.\ \alpha$ 不是有限不可约之交$\}$

存在极大元 α. $\because$ α 可约

$\alpha=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$. 由 $\begin{matrix}\alpha\subsetneq\mathfrak{b}\\ \alpha\subsetneq\mathfrak{c}\end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ 为有限不可约交

$\Rightarrow$ α 为有限不可约之交 $\Rightarrow$ 矛盾

引理2. 诺特环中. 不可约理想是准素理想

α 不可约. 考虑 A/α 环中 $\bar{0}$

只需证 $\bar{0}$ 为 A/α 中准素理想

设 $xy=0$ 且 $y\neq0$ 只需证 $\exists n.\ x^n=0$

$\because$ $Ann(x)\subseteq Ann(x^2)\subseteq\cdots$

$\therefore$ $Ann(x^n)=Ann(x^{n+1})$

考虑 $Ann(x^n)\cap(y)$.

设 $z\in$. 则 $\begin{matrix}zx=0\\ z=bx^n\end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix}b\in Ann(x^{n+1})\\ =Ann(x^n)\end{matrix}$

$\Rightarrow$ $z=0$ $\Rightarrow$ $Ann(x^n)\cap(y)=(0)$

$\because$ (0) 不可约 $\Rightarrow$ $Ann(x^n)=0$

$\Rightarrow$ $x^n=0$ □

Thm.

由此 在诺特环中 每个真理想都有(有限)准素分解

命题. 诺特环 A. 每个理想 $\alpha\supseteq r(\alpha)^m$ $(\exists m)$

设 $x_1\cdots x_k$ 生成 $r(\alpha)$

则 $x_i^{r_i}\in\alpha$.

则 $m=\Sigma(r_i-1)+1$

$(r(\alpha))^m\subseteq\alpha$. □

推论. 诺特环中 幂零根幂零

取 $\alpha=(0)$ 则 $(nil(A))^m\subseteq(0)$ □

推论 A 诺特环, $\mathfrak{m}$ 极大理想. 下述等价

(1) $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{m}$-准素

(2) $r(\mathfrak{q})=\mathfrak{m}$ (3). $\exists n.$ $\mathfrak{m}^n\subseteq\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{m}$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) 显然

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) 显然 □

命题. $\alpha\neq(1)$ 为诺特环中理想

则属于 α 的素理想恰为

$(\alpha:x)$ 中出现的素理想,

(对比于 Ch4 中 $r(\alpha:x)$)

证. 可在 A/α 中讨论. 故不妨 $\alpha=(0)$

设 $0=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 极小准素分解.

$p_i=r(\mathfrak{q}_i)$

取 $\alpha_i=\bigcap\limits_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$ 则

$\forall 0\neq x\in\alpha_i$ $Ann(x)=(0:x)=\bigcap(\mathfrak{q}_i:x)=(\mathfrak{q}_i:x)$

$\Rightarrow$ $r(Ann(x))=p_i$

$\therefore$ $Ann(x)\subseteq p_i$

又 $p_i^m\subseteq\mathfrak{q}_i$ $\Rightarrow$ $\alpha_i p_i^m\subseteq\alpha_i\cap p_i^m\subseteq\alpha_i\cap\mathfrak{q}_i=0$

$\therefore$ 取最小的 m. 使 $\begin{matrix}\alpha_i p_i^{m-1}\neq(0)\\ \alpha_i p_i^m=(0)\end{matrix}$

取 $x\in\alpha_i p_i^{m-1}$ $\Rightarrow$ $p_i x\subseteq\alpha_i p_i^m=0$

$\Rightarrow$ $p_i\subseteq Ann(x)$

$\Rightarrow$ $p_i=Ann(x)$

相反地. 若 $(\alpha:x)$ 为素 $\Rightarrow$ $r(\alpha:x)$ 为素

由 Ch4 的结论

$r(\alpha:x)$ 为属于 α 的素理想

$\Rightarrow$ $(\alpha:x)=r(\alpha:x)$ 为属于 α 的素理想