推论（Hilbert 零点定理弱形式）

k 为域，B 为有限生成 k 代数

若 B 为域，则 B 为 k 的有限代数扩张

证：取 $f: k \to \Omega$，$1 \mapsto 1$. $g: B \to \Omega$，$x \mapsto g(x)$

$\because$ B 域 $\Rightarrow g(x)g(x^{-1}) = g(1) = f(1) \neq 0$

$\therefore$ g 单 $\longrightarrow$ x 在 k 上代数

又 $g(x)$ ~~在 k 上代数~~ $\in \Omega$ 为 k 的代数闭包 $\Rightarrow$ □

Ch 6 链条件

命题. 下列命题等价

(1) $x_1 \le x_2 \le \dots$ 在 Σ 中稳定

(2) Σ 的非空子集有极大元

(1)⇒(2) 反证

(2)⇒(1). $\{x_n\}$ 中极大元 x_n，即稳定

子模升链稳定 (acc) 为诺特模

子模降链稳定 (dcc) 为阿廷模

命题. M 为诺特 A 模 $\Leftrightarrow$ M 的每个子模有限生成

"⇒" $N \subseteq M$ 子模，若 N 不是有限生成，

取 $\Sigma = \{ N' \subseteq N \mid N' \text{有限生成} \}$

$\because 0 \in \Sigma$. $\Rightarrow$ Σ 中极大元 N_0

若 $N_0 \subsetneq N$ 则 $\exists\, x \in N$. $x \notin N_0$

$\therefore N_0 \subsetneq N_0 + \langle x \rangle \subseteq N$

$N_0 + \langle x \rangle$ 有限生成 $\in \Sigma$. 矛盾

"⇐" 取 M 的升链 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$

$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 为 M 的子模，故有限生成

$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \langle x_1, \dots x_m \rangle$

设 $x_1 \in M_{n_1}, \dots x_m \in x_{n_m}$

$\therefore N = \max\{n_1, \dots n_m\}$

有 $x_i \in M_N$. $\therefore M_N = M_{N+1} = \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 稳定

命题.（判定方法之一）

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 为 A 模正合列

(1) M 为诺特模 $\Leftrightarrow$ M', M'' 诺特模

(2) M 为 Artin 模 $\Leftrightarrow$ M', M'' Artin 模

只证 (1)： $M'' \cong M/M'$

"⇒" M' 的子模升链为 M 的子模升链，故稳

M'' 的子模升链与 J/M' 一一对应，故稳定

"⇐" $M_1 \subseteq \dots$ 升链

$M_1 \cap M' \subseteq M_2 \cap M' \subseteq \dots$ M' 子模升链.

$M_1 + M'/M' \subseteq M_2 + M'/M'$ M'' 子模升链 …

$M_N + M'/M' \cong M_N / M_N \cap M'$

$\| \qquad\qquad \|$

$M_{N+1} + M'/M' \qquad M_N / M_{N+1} \cap M'$

$\cong M_{N+1}/M_{N+1} \cap M'$

$\Rightarrow M_N = M_{N+1}$

$\Rightarrow \dots$ 稳定

推论. M_i 是诺特模 / Artin 模

$\Leftrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ 是诺特模 / Artin 模

定义. 诺特环 / Artin 环是指 A 作为 A 模是～/Artin 模

例. (1) 有限 Abel 群（$\mathbb{Z}$ 模）满足 ACC 及 DCC

(2) $\mathbb{Z}$ acc，但不满足 dcc

(3) $G \le \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. G 中元素的阶为 p^n ($n \in \mathbb{Z}$) 固定 p

则 $G_0 \le G_1 \le G_2 \le \dots$

故 G 不满足 acc.

但 G 的真子群是 G_n . 故满足 dcc

(4) $H = \{ \frac{m}{p^n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \ge 0 \}$

由 $0 \to \mathbb{Z} \to H \to G \to 0$

$\therefore$ H 既不满足 acc，也不满足 dcc

(5) k, $\mathbb{Z}/(n)$ 是诺特环，Artin 环

$\mathbb{Z}$ 是诺特环，不是 Artin 环

(6) PID 是诺特环（理想有限生成）

(7) 诺特环的子环不一定是诺特环

$k[x_1, \dots]$ $\subseteq$ Frac $k[x_1, \dots]$

命题. A 为诺特/Artin 环

M 为有限生成 A 模. 则 M 为诺特/Artin 模

$M \cong A^n/\mathrm{Ker}\,\varphi$. A^n 诺特/Artin 模

命题. A. 诺特/Artin 环. $\alpha \subseteq A$

则 A/α 是诺特/Artin 环

$0 \to \alpha \to A \to A/\alpha \to 0$

A 是诺特 A 模 $\Rightarrow$ A 是诺特 A/α 模

$\Rightarrow$ A/α 是诺特 A/α 模 $\Rightarrow$ A/α 为～环.

合成列.

链. $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$

称为合成列 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ M_i/M_{i+1} 为单模

链的长度为 n.

命题. 设 M 有长度为 n 的合成列.

则 M 的任意合成列长度均为 n

且每个链都可扩充为合成列.

设 $l(M)$ 为 M 的最短合成列长度.

① $N \subseteq M$ 有 $l(N) \leq l(M)$ "=" 在 $N=M$ 成立.

考虑 M 的极小合成列

$M_0 \supsetneq \cdots \supsetneq M_{l(M)} = 0$

设 $N_i = M_i \cap N$

$\Rightarrow N_i/N_{i+1} \subseteq M_i/M_{i+1}$ 单模

$\Rightarrow N_i/N_{i+1} = 0$ 或 M_i/M_{i+1}

移去 $N_i = N_{i+1}$ 的重复项

可得 N 的一个合成列 $\Rightarrow l(N) \leq l(M)$

若 "=" 成立. 则 $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$

考虑到 $M_{l(M)} = 0 = N_{l(M)} \Rightarrow M = N$

② $\forall$ 一个 M 的链的长度 $k \leq l(M)$

由 $M \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k = 0$

$\Rightarrow l(M) > l(M_1) > \cdots > l(M_k) = 0$

$\therefore l(M) \geq k$

③ 考虑 M 的合成列

若长度为 k. 由 ②. $k \leq l(M)$

由 $l(M)$ 极小. $\Rightarrow k = l(M)$

$\therefore$ M 的所有合成列长度相同

而对于不是合成列的链

可以扩充为合成列

命题. M 有合成列 $\Leftrightarrow$ M 满足 a.c.c. d.c.c.

"$\Rightarrow$" 每个链长度有限. 则 M 不可能不稳定 —

"$\Leftarrow$". 取 $\Sigma_1 = \{M$ 的所有真子模$\}$ M_1 (极大元)

$\Sigma_2 = \{M_1$ 的所有真子模$\}$ M_2 极大元

$\Rightarrow$ $M \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \cdots \supsetneq M_n$ 稳定

$\therefore$ $M_n = M_{n+1}$. 故 $M_n = 0$

(于是有定义: M 长度有限 $\Leftrightarrow$ a.c.c. d.c.c.)

Jordan. Hölder

$\forall$ 两个合成列同构,

且 $\{M_i/M_{i+1}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{M_i'/M_{i+1}'\}$

· $l(M)$ 是加性函数

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 有 $l(M) = l(M') + l(M'')$

$M \supseteq M'$ 扩充为 M 的合成列

$M \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k = M' \underbrace{\supsetneq M_{k+1} \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0}_{M' \text{的合成列}}$ $n-k$

$M/M_k \supsetneq M_1/M_k \supsetneq \cdots \supsetneq M_k/M_k = 0$

为 M'' 的合成列. k.

□

命题. k 上线性空间 V. 下列等价

(1) 有限维

(2) 有限长度

(3) acc . (4) dcc

更进一步, 只要上述满足一个, 长度 = 维数

(1) ⇒ (2) 显然

(2) ⇒ (3)(4) 由上命题

(3) ⇒ (1) 否则 V 无穷维. $=(x_1, \cdots)$

$U_n = (x_1, \cdots x_n)$ 则 $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots$

(4) ⇒ (1) $V_n = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$

$V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq V_3 \supsetneq \cdots$ 矛盾

推论. A 为环. $0 = m_1 m_2 \cdots\cdots m_n$.

m_i 极大理想, 则

A 诺特环 ⇔ A Artin 环

证. 考虑 $A \supseteq m_1 \supseteq m_1 m_2 \supseteq \cdots \supseteq m_1 \cdots m_n = 0$

$m_1 \cdots m_i / m_1 \cdots m_{i+1}$ 是 A/m_{i+1} 域上线性空间

因此 $m_1 \cdots m_i / m_1 \cdots m_{i+1}$ acc ⇔ dcc

A acc ⇔ 每个 $m_1 \cdots m_i / m_1 \cdots m_{i+1}$ acc ⇔ ( ) dcc

⇔ A dcc □