ch5. 整性与赋值

命题. 下列等价. ($A \subseteq B$ 子环)

(1) $x \in B$ 在 A 上整

(2) $A[x]$ 是有限生成 A-模

(3) $A[x] \subseteq C \subseteq B$. C 是 B 的子环, 且是有限生成 A 模

(4) 存在 有限生成 A 模 M. 是忠实的 $A[x]$ 模

证: (1)⇒(2): $\forall x^{n+r}$ 可被 $1, x, \cdots x^{n-1}$ 表出.

(2)⇒(3) 取 $C = A[x]$

(3)⇒(4) $M = C$. 有限生成 A 模.

$\forall y \in A[x]$ 若 $yM = 0$

$\because M = C \supseteq A[x] \ni 1$

$\Rightarrow y = 0$

(4)⇒(1) 取 $\phi = x$ 有 $\phi M \subseteq M$ (M 为 $A[x]$ 模)

$\Rightarrow (\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \cdots + \phi^0) m = 0$

由 M 忠实 $\Rightarrow \phi^n + \cdots + \phi^0 = 0$

推论: $x_i \in B$. 且在 A 上整

则 $A[x_1, \cdots x_n]$ 是有限生成 A 模

$A[x_1]$ 是 (由上)

$(A[x_1])[x_2]$ 是有限生成 $A[x_1]$ 模

利用有限生成模的传递性

$A[x_1, x_2]$ 是有限生成 A 模 □

推论 C 是 B 在 A 上整的元素全体

则 $A \subseteq C \subseteq B$ 子环

$x, y \in C$. 有 $A[x, y]$ 为有限生成 A 模

$\Rightarrow A[x \pm y]$, $A[xy]$ 为有限生成 A 模

(利用 (3) 找到 $A[\ ]$ 与 B 的中间 "C")

$\Rightarrow x \pm y$. xy 在 A 上整.

注. 若 $f: A \to B$ 环同态, B 作为 A-代数

若 B 在 $f(A)$ 上整. 则 B 为整 A 代数.

我们有: 有限型 (环为子环) + 整 ⟺ 有限 (模)

"⇒" $B = f(A)[b_1, \cdots b_n]$ b_i 整 (利用推论1)

"⇐" $\langle b_1, \cdots b_n \rangle = B$. $f(A)[b_i]$ 有限生成 $f(A)$ 模

推论. $A \subseteq B \subseteq C$.

B 在 A 上整. C 在 B 上整 ⇒ C 在 A 上整

$\forall c \in C$.

$c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$

取 $B' = A[b_0, \cdots b_{n-1}]$ 有限生成 A 模

又 $B'[c]$ 是有限生成 B' 模

$\Rightarrow B'[c]$ 有限生成 A 模

$\Rightarrow c$ 在 A 上整

($A[c] \subseteq B'[c] \subseteq C$) □

推论: $A \subseteq B$. C 为 A 在 B 的整闭包.

则 C 在 B 上整闭

($C = A$. 则 A 在 B 上整闭.
$C = B$. 则 B 在 A 上整).

$x \in B$. 在 C 上整

由 C 在 A 上整.

$\Rightarrow x$ 在 A 上整. $\Rightarrow x \in C$.

$\Rightarrow C$ 在 B 上整闭.

命题. $A \subseteq B$ 为环. B 在 A 上整.

1). b 为 B 的理想. $a = b^c = b \cap A$ 为 A 上理想

则 B/b 在 A/a 上整

2) S 是 A 的乘法封闭集

$S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上整.

证 (1) $x \in B$. $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$

两边模 b 在 A/a 上整

$\bar{x}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{x}^{n-1} \cdots + \bar{a}_0 = \bar{0}$ 故 $\bar{x} \in B/b$

(2) 对 $x^n + \cdots + a_0 = 0$

$\Rightarrow (\frac{x}{s})^n + \frac{a_{n-1}}{s}(\frac{x}{s})^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{s^n} = 0$

故 $S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上整.

命题 $A\subseteq B$ 整环 B在A上整. 则

B是域 $\Longleftrightarrow$ A是域

"$\Leftarrow$" A是域. $\forall y\neq 0\in B$

$y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_0=0$ (可设 $a_0\neq 0$)

$\Rightarrow y^{-1}=-a_0^{-1}(y^{n-1}+a_{n-1}y^{n-2}\cdots)$

"$\Rightarrow$" B是域. $\forall x\in A$. $\Rightarrow x^{-1}\in B$.

$\Rightarrow (x^{-1})^m+a'_{m-1}(x^{-1})^{m-1}+\cdots+a'_0=0$

$\Rightarrow x^{-1}=-(a'_{m-1}+a'_{m-2}x+\cdots+a'_0x^{m-1})$

推论 $A\subseteq B$ 环. B在A上整

q为B上素 $p=q^c=q\cap A$.

q 极大 $\Longleftrightarrow$ p 极大

B/q 整环. 在 A/p 上整

q极大 $\Leftrightarrow$ B/q 域 $\Leftrightarrow$ A/p 域 $\Leftrightarrow$ p 极大

推论 $A\subseteq B$ 环. B在A上整

q, q' 为B的素理想. $q\subseteq q'$

且 $q'^c=q^c=p$ 则 $q=q'$

证 B_p 在 A_p 上整

设 n, n' 为 q, q' 在 B_p 上的扩理想

$\because$ p 的扩理想 $pA_p=m$ 为 A_p 极大

$\therefore$ n, n' 均极大. $\Rightarrow n=n'$

$\Rightarrow q=q'$

Thm $A\subseteq B$. B在A上整 p为A中素理想

则 $\exists\, q\subseteq B$ 素 $q\cap A=p$

$$\begin{tikzcd}
A_p \arrow[r, "i_p"] & B_p \\
A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur] \arrow[r, "i"] & B \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

图表交换

取 n 为 B_p 的极大理想

$\Rightarrow n^c=n\cap A_p$ 为 A_p 的极大理想

$\Rightarrow n\cap A_p=pA_p$

$\Rightarrow \alpha^{-1}(n\cap A_p)=p$

即 $\alpha^{-1}i_p^{-1}(n)=p$

$\Rightarrow i^{-1}\beta^{-1}(n)=p$

$\Rightarrow m=\beta^{-1}(n)$ 即为所求

上行定理. $A\subseteq B$. B在A上整

$p_1\subseteq\cdots\subseteq p_n$ 为A中素. 链

$q_1\subseteq\cdots\subseteq q_m$ 为B中素. 链

且 $q_i\cap A=p_i$

则 $\{q_i\}$ 的链可扩充为 $\{q_i\}_1^n$

证 只需证 $n=2$, $m=1$ 情况

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] & B/q_1=\bar{B} \\
A \arrow[u] \arrow[r] & A/p_1=\bar{A}
\end{tikzcd}$$

$\bar{B}$ 在 $\bar{A}$ 上整

$\bar{p}_2\subseteq\bar{A}$ 为 $\bar{A}$ 中素

$\Rightarrow \exists\, \bar{q}_2\subseteq\bar{B}$. 为 $\bar{B}$ 中素

$\bar{q}_2\cap\bar{A}=\bar{p}_2$

$\Rightarrow q_2=(\bar{q}_2)^c$ 即为所求 $(p_1\subseteq p_2)$. □

命题 $A\subseteq B$. C为A在B上的整闭包

$S\subseteq A$ 乘性子集

$S^{-1}C$ 为 $S^{-1}A$ 在 $S^{-1}B$ 上的整闭包.

证. $S^{-1}C$ 在 $S^{-1}A$ 上整

又. $\forall\, \frac{b}{s}\in S^{-1}B$. 若在 $S^{-1}A$ 上整

$\Rightarrow (\frac{b}{s})^n+\frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}(\frac{b}{s})^{n-1}+\cdots+\frac{a_0}{s_0}=0$

去分母. 令 $t=s_{n-1}\cdots s_0$

$\Rightarrow bt$ 在 A 上整

$\Rightarrow bt\in C$. $\Rightarrow \frac{b}{s}=\frac{bt}{st}\in S^{-1}C$

故 $S^{-1}C$ 在 $S^{-1}A$ 上整闭

A 整环. 为整闭整环

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ A在 $\mathrm{Frac}A$ 上整闭

例. $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上整闭

一般地 对 UFD A

A 为整闭整环

$(\frac{b}{a})^n+\cdots+a_0=0$ $\quad (b,a)=1$

$\Rightarrow b^n+\cdots+a_0a^n=0$

若 $p\mid a \Rightarrow p\mid b$ 矛盾

局部性质: A 整环. 下述等价

(1). A 整闭

(2) A_p 整闭 $\forall p$ 素

(3) A_m 整闭 $\forall m$ 极大

证 令 K 为 A 的分式域

设 C 为 A 在 K 的整闭包.

令 $f: A\to C$ 为 Id 映射

$f_p: A_p\to C_p$

$f_m: A_m\to C_m$

则 A 整闭 $\Leftrightarrow$ f 满 $\Leftrightarrow$ f_p 满 $\Leftrightarrow$ f_m 满

$\Updownarrow$ $C_p=A_p$, $\Updownarrow$ $C_m=A_m$ □

$A\subseteq B$, α 为 A 的理想

$x\in B$ 在 α 上整 指 存在多项式

$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0$. ($a_i\in\alpha$)

引理: C 为 A在B的整闭包.

α^e 为 α 在 C 上的扩理想,

则 α 在 B 的整闭包 $=r(\alpha^e)$

证: "$\subseteq$" $\overset{\in B}{x}$ 整 $\Rightarrow$ x 在 A上整 $\Rightarrow x\in C$

由 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0$

$\Rightarrow x^n\in\alpha^e \Rightarrow x\in r(\alpha^e)$

"$\supseteq$" $x^n\in\alpha^e \Rightarrow x^n=\sum_{i=1}^m a_ix_i$ ($a_i\in\alpha$, $x_i\in C$)

$\Rightarrow$ 取 $M=A[x_1,\dots,x_m]$ 为有限生成 A模

$\phi=x^n$

$\because \phi M\subseteq\alpha M$

$\Rightarrow$ ϕ 有整化多项式

$\Rightarrow (x^n)^k+\dots+a_0'=0$ ($a_i'\in\alpha$)

x 在 α 上整 □

命题. $A\subseteq B$ 整环. A 整闭.

$x\in B$ 在 α 上整. 则 x 在 $K=\mathrm{Frac}A$ 上代数

且 如果 它在K上的最小多项式是 $t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_0$

则 $a_i\in r(\alpha)$

证 x在α上整 $\Rightarrow$ x在K上代数

设 L 为 K 的扩域. 使 $x_1,\dots,x_n\in L$.

x_i 满足 x 在 α 上整的 那个方程

$\Rightarrow x_i$ 在 α 上整

$\because$ 每个 a_i 可写成 x_j 的多项式

$\Rightarrow a_i$ 在 α 上整

$\Rightarrow a_i\in r(\alpha^e)=r(\alpha)$ (A在K上整闭) □

Thm. 下降定理: $A\subseteq B$ 整环, A 整闭

B 在 A上整. 令 $p_1\supseteq\dots\supseteq p_n$ 为 A中素,

$q_1\supseteq\dots\supseteq q_m$ 为 B中素, ($m<n$)

且 $p_i=q_i\cap A$

则 $q_1\supseteq\dots\supseteq q_m$ 可扩充为 $q_1\supseteq\dots\supseteq q_n$. 且 $q_i\cap A=p_i$

证: 只需证 $m=1$ $n=2$ 时.

思路: 证 p_2 是 B_{q_1} 中理想的限制

或 $B_{q_1}p_2\cap A=p_2$. (那么 $q_2=B_{q_1}p_2\cap B$ 即为所求)

① $\forall x\in B_{q_1}p_2$. $x=\frac{y}{s}$. $y\in Bp_2$. $s\in B-q_1$

$\because y\in Bp_2=p_2^e \Rightarrow$ y 在 p_2 上整 (引理)

取 在 $\mathrm{Frac}A=K$ 上的最小多项式

(1) $y^r+u_{r-1}y^{r-1}+\dots+u_0=0$ ($u_i\in K$)

利用上命题 $u_i\in r(p_2)=p_2$

② 设 $x\in B_{q_1}p_2\cap A$. 则 $s=yx^{-1}$. ($x^{-1}\in K$)

s在K上的最小多项式 由 (1)/x^r 得到

$s^r+\underbrace{\frac{u_{r-1}}{x}}_{=v_{r-1}}s^{r-1}+\dots+\underbrace{\frac{u_0}{x^r}}_{=v_0}=0$ (2)

$\therefore x^iv_{r-i}=u_{r-i}\in p_2$ (3)

由 s 在A上整 $\overset{\text{上命题}}{\underset{\text{取}\alpha=(1)}{\Rightarrow}}$ $v_i\in A$

若 $x\notin p_2 \Rightarrow v_i\in p_2$ 由 (3)

$s^r\in Bp_2\subseteq Bp_1\subseteq q_1 \Rightarrow s\in q_1$ 矛盾

$\therefore x\in p_2 \Rightarrow B_{q_1}p_2\cap A=p_2$. 即为所证. □

命题. A 整闭整环, $K = \mathrm{Frac}A$.

L 是有限可分代数扩张 (L/K)

B 是 A 在 L 上的整闭包.

则 $\exists\ v_1,\dots,v_n \in L/K$. $B \subseteq \sum_{j=1}^{n} A v_j$

证 $\forall\ v \in L$. v 在 K 上代数

$\Rightarrow a_r v^r + \dots + a_0 = 0 \quad (a_i \in A)$

$(\times a_r^{r-1}) \Rightarrow (a_r v)^r + \dots + a_0 a_r^{r-1} = 0$

令 $u = a_r v \quad u^r + \dots + a_0 a_r^{r-1} = 0$

$\rightarrow u$ 在 A 上整 $\Rightarrow u \in B$

因此. 对 L/K 的基. 可以通过乘以合适的 A 中数 使其基' $= \{u_1,\dots,u_n\}$. $u_i \in B$

令 $T: L \to K$ 为 trace 映射

$\because L/K$ 可分 $\quad (x,y) \mapsto T(xy)$ 为双线性映射 非退化

可得对偶基 $v_1,\dots,v_n$. (L/K)

$T(u_i v_j) = \delta_{ij}$

令 $x \in B$. $x = \sum x_j v_j \quad (x_j \in K)$

$\Rightarrow x u_i \in B \Rightarrow T(x u_i) \in A$.

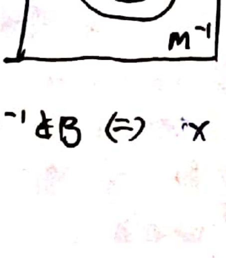
? (T 映射: $u \longmapsto$ 最小多项式的系数)

又 $T(x u_i) = \sum_j T(x_j u_i v_j) = \sum_j x_j T(u_i v_j)$

$= \sum_j x_j \delta_{ij} = x_i \Rightarrow x_i \in A$

$\therefore B \subseteq \sum_j A v_j$ □

注,



$x^{-1} \notin B \Leftrightarrow x \in m$

赋值环

B 整环. $K = \mathrm{Frac}B$.

B 是 K 的赋值环: $\forall\ x \neq 0$. $x \in B$ 或 $x^{-1} \in B$

命题. (1). B 是局部环

(2) 若 $B \subseteq B' \subseteq K$. 则 B' 也是赋值环

(3) B 在 K 上整闭

证(1) 取 m 为 $B - B^\times$ ($B^\times$ 为单位群)

$\forall\ a \in B$. $x \in m$ 矛盾

若 $ax \notin m \Rightarrow ax \in B^\times \Rightarrow (ax)^{-1} \in B^\times \Rightarrow x^{-1} \in B^\times$

$x, y \in m$. $\frac{y}{x}, \frac{x}{y}$ 有一个 $\in B$

$x + y = x(1 + \frac{y}{x}) \in m$

(2) 显然

(3) $x \in K$. 在 B 上整

$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 = 0$

若 $x \in B$ ✓

$x \notin B \Rightarrow x = -(b_{n-1} + b_{n-2}x^{-1} + \dots + b_0 x^{1-n}) \in B$

□

赋值环的存在性.

令 K 为域, Ω = 代数闭域

$\Sigma = \{(A,f) \mid A \subseteq K.\ f: A \to \Omega\}$

偏序关系: $(A,f) \le (A',f')$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A \subseteq A'$. $f'|_A = f$

利用 Zorn 引理. 可证

Σ 中存在极大元 (B,g)

引理1. B 是局部环 且 $m = \ker g$ 为极大理想

$\because g(B) \subseteq \Omega \Rightarrow g(B)$ 为整环

$\rightarrow B/m \cong g(B) \Rightarrow m$ 为素理想

$g: B \to \Omega$

延拓 $\rightarrow$ $\bar{g}: B_m \to \Omega \qquad \because s \notin m \Rightarrow g(s) \neq 0$

$\frac{b}{s} \mapsto \frac{g(b)}{g(s)}$

$\because \bar{g}|_B = g \Rightarrow B = B_m$ (由 B 极大)

又 $B \supset \bigcap_{p\text{极}} B_p = B_m \Rightarrow m$ 为唯一极大

引理2. $x \neq 0, \in K$, $B[x] \subseteq K$

$m[x]$ 为 m 在 $B[x]$ 的扩理想

则 $m[x] \neq B[x]$ 或 $m[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$

否则, $m[x] = B[x]$, $m[x^{-1}] = B[x^{-1}]$

$\because 1 \in B[x]$, $1 \in B[x^{-1}]$

$\Rightarrow 1 = u_0 + u_1 x + \cdots + u_m x^m$ $u_i, v_i \in m$

$1 = v_0 + v_1 x^{-1} + \cdots + v_n x^{-n}$

并且 m, n 的值尽可能小, 不妨 $m \geq n$.

$\because (1-v_0)x^n = v_1 x^{n-1} + \cdots + v_n$

代入 $1 = u_0 + \cdots + u_m x^m$

得到次数更小的多项式, 矛盾. □

Thm. (B, g) 是 Σ 中的极大元 则 B 是 K 的赋值环

由引理2. 不妨 $m[x] \neq B[x] = B'$

要证 $x \in B$. 即证 $B' = B$ 否则 $x \notin B$, $x^{-1} \in B$

$\because m[x] \subsetneq B[x]$. 故存在极大 m'. $m[x] \subseteq m'$

$\Rightarrow m' \cap B = m$

$\therefore B \hookrightarrow B' = B[x]$

诱导 $k = B/m \hookrightarrow B'/m' = k' = B[x]/m' = k[\bar{x}]$

$\bar{x}$ 为 x 在 k' 的像

$\bar{x}^{-1} \in k' = k[\bar{x}]$

$\Rightarrow \bar{x}^{-1} = f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} f(\bar{x}) - 1 = 0$

$\bar{x}$ 在 k 上代数

$\therefore k'$ 是 k 的有限代数扩张

又 $g: B \to \Omega \Rightarrow \bar{g}: k = B/m \to \Omega$

$\because \Omega$ 代数闭域

$\bar{g}$ 可延拓到 $\bar{g}': k' \to \Omega$.

$\therefore$ 有 $g': B' \xrightarrow{\pi'} B'/m' \xrightarrow{\bar{g}'} \Omega$

$\Rightarrow (B, g) = (B', g')$ (Σ 极大元)

$\Rightarrow B = B' = B[x]$ □

推论 $A \subseteq K$ 域, 则 $\bar{A}$ 整闭包

$\bar{A} = \bigcap_{B \supseteq A} B$ B 为 K 的赋值环

① $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B} = B$

② 若 $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \notin A' = A[x^{-1}]$

(否则 $x \in \bar{A}$)

$\Rightarrow x^{-1}$ 不是 A' 中单位. $\Rightarrow x^{-1} \in \underset{\text{极大}}{m'} \subseteq A$

(现只需构造 (B, g), $B \supseteq A$. 则 $x^{-1} \in m = \ker g \Rightarrow x \notin B$)

取 Ω 为 $k' = A'/m'$ 的代数闭包

则 $f: A' \to k' \hookrightarrow \Omega$.

诱导 $f|_A: A \to \Omega$.

$\Rightarrow$ 由 Thm. 可得到极大元 (B, g)

$g|_A = f|_A \Rightarrow g(x^{-1}) = f(x^{-1}) = 0$

$\therefore x^{-1} \in \ker g = m \Rightarrow \cdots$ □

(即 $\exists B$. $x \notin B$)

命题. $A \subseteq B$ 整环. B 在 A 上有限生成

v 是 B 中非0元. 则 $\exists u \neq 0$. $\in A$. 满足

$\forall f: A \to \Omega$, 若 $f(u) \neq 0$ 则可延拓到

$g: B \to \Omega$. $g(v) \neq 0$

证. 利用数归. 设 $B = A[x]$

① 若 x 在 A 上超越 设 $v = a_0 x^n + \cdots + a_n$

取 $a_0 = u \neq 0$ 对于 $\forall f: A \to \Omega$. $f(a_0) \neq 0$

$\because \Omega$ 无限域 $\Rightarrow \exists \xi \in \Omega$. $f(a_0)\xi^n + \cdots + f(a_n) \neq 0$

即取 $g: B \to \Omega$. $x \mapsto \xi$. $\Rightarrow g(v) \neq 0$

② x 在 A 上 (Frac$A$ 上) 代数 $k = \mathrm{Frac}A$ $k[x] = k(x)$

$\because v = a_0 x^n + \cdots + a_n$

则 v^{-1} 在 k 上代数

$\Rightarrow a_0 x^m + \cdots + a_m = 0$ $(a_i \in A)$ (1)

$b_0 v^{-n} + \cdots + b_n' = 0$ $(b_i \in A)$ (2)

取 $u = a_0 b_0$ $f: A \to \Omega$. $f(a_0 b_0) \neq 0$

则 f 延拓到 $f_1: A[u^{-1}] \to \Omega$ $f_1(u^{-1}) = f(u)^{-1}$

由 Thm. 可延拓到 $h: C \to \Omega$. C 是包含 $A[u^{-1}]$ 赋值环

由 (1) x 在 $A[u^{-1}] \subseteq C = \bar{C}$ 上整 $\Rightarrow x \in C \Rightarrow B \subseteq C$

$\Rightarrow v \in C$. 又 v^{-1} 在 $A[u^{-1}] \subseteq C = \bar{C}$ 上整. $\Rightarrow v^{-1} \in C$

$\Rightarrow v$ 为 C 上单位 $\Rightarrow h(vv^{-1}) = h(1) \neq 0 \Rightarrow h(v) \neq 0 \Rightarrow g = h|_B$ 即可

推论（Hilbert 零点定理弱形式）

k 为域，B 为有限生成 k 代数

若 B 为域，则 B 为 k 的有限代数扩张

证 取 $f: k \to \Omega$，$1 \mapsto 1$ ； $g: B \to \Omega$，$x \mapsto g(x)$

$\because B$ 域 $\Rightarrow g(x)g(x^{-1}) = g(1) = f(1) \neq 0$

$\therefore g$ 单 $\to$ x 在 k 上代数

又 $g(x)$ ~~在 Ω 上代数~~ $\to$ x 在 k 上代数

$\in \Omega$ 为 k 的代数闭包

$\square$