准素分解

定义：准素理想 $\mathfrak{q} \subsetneq A$

若 $xy \in \mathfrak{q}$ 则 $x \in \mathfrak{q}$ 或 $y \in r(\mathfrak{q})$

也即 $A/\mathfrak{q} \neq 0$ 且 $A/\mathfrak{q}$ 的零因子是幂零的

命题：$\mathfrak{q}$ 准素，则 $r(\mathfrak{q})$ 是包含 $\mathfrak{q}$ 的最小素理想

$r(\mathfrak{q})$ 是素显然：

$xy \in r(\mathfrak{q}) \Rightarrow (xy)^m \in \mathfrak{q} \Rightarrow x^m \in \mathfrak{q}$ 或 $y^m \in r(\mathfrak{q})$

$\Rightarrow x \in r(\mathfrak{q})$ 或 $y \in r(\mathfrak{q})$

而 $r(\mathfrak{q}) = \bigcap_{p \supseteq \mathfrak{q}} p$ 故最小性得证

注. 1. p 素即准素

2. $\mathfrak{q}$ 准素 $\Rightarrow \mathfrak{q}^c$ 准素

$A/\mathfrak{q}^c \cong f(A)+\mathfrak{q}/\mathfrak{q}$

3. $\mathbb{Z}$ 上准素为 (0) 及 (p^n)

4. $A = k[x,y]$ $\mathfrak{q} = (x, y^2)$ $\mathfrak{q}$ 非素

但 $\mathfrak{q}$ 准素：$A/\mathfrak{q} \cong k[y]/(y^2)$

由 $r(\mathfrak{q}) = p = (x,y)$ 有 $p^2 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq p$

即 $\mathfrak{q}$ 不一定是素理想的幂次

5. 素理想的幂次不是准素

$A = k[x,y,z]/(xy-z^2)$，$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

取 $p = (\bar{x}, \bar{z})$ 由 $A/p \cong k[y] \Rightarrow p$ 素，

由 $\bar{x}\bar{y} = \bar{z}^2 \in p^2$ 但 $\bar{x} \notin p^2$，$\bar{y} \notin r(p^2)$

$\Rightarrow p^2$ 不是准素

命题. 若 $r(\alpha)$ 是极大理想 $\Rightarrow \alpha$ 准素，

特别地 m^n 是 m 准素

Pf. 设 $r(\alpha) = m$，考察 A/α 与 m/α

由 m 是唯一包含 α 的理想 $\Rightarrow (A/\alpha, m/\alpha)$ 局部环

$\Rightarrow A/\alpha$ 的元素为单位或 $\in m/\alpha$ 为幂零

□

引理. $\mathfrak{q}_i$ 是 p 准素 则 $\mathfrak{q} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ 是 p 准素

pf: $r(\mathfrak{q}) = r(\bigcap \mathfrak{q}_i) = \bigcap r(\mathfrak{q}_i) = p$

$xy \in \mathfrak{q}$，$y \notin \mathfrak{q} \Rightarrow \exists i$ $y \notin \mathfrak{q}_i \Rightarrow x \in r(\mathfrak{q}_i) = p$

□

引理. $\mathfrak{q}$ 为 p 准素，$x \in A$

(1). $x \in \mathfrak{q}$. 则 $(\mathfrak{q}:x) = (1)$

(2) $x \notin \mathfrak{q}$. 则 $(\mathfrak{q}:x)$ 是 p-准素

(3) $x \notin p$ 则 $(\mathfrak{q}:x) = \mathfrak{q}$

对 (2). $y \in (\mathfrak{q}:x) \Rightarrow y \in p$

$\Rightarrow \mathfrak{q} \subseteq (\mathfrak{q}:x) \subseteq p$ 两边取根

$\Rightarrow p = r(\mathfrak{q}:x)$

$(\mathfrak{q}:x)$ 是准素 易证

对 $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$

极小准素分解 ① $r(\mathfrak{q}_i)$ 互不相同

② $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$

Thm. 第一唯一性定理：

$\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$，极小准素分解.

设 $p_i = r(\mathfrak{q}_i)$ 则，记 $\Sigma = \{p_i\}$

$\Sigma = \{ r(\alpha:x) \mid x \in A \}$ 中的素理想

且只依赖于 α

$(\alpha:x) = \bigcap(\mathfrak{q}_i:x) = \bigcap_{x \notin \mathfrak{q}_i} (\mathfrak{q}_i:x)$

$\Rightarrow r(\alpha:x) = \bigcap_{x \notin \mathfrak{q}_i} p_i$

若 $r(\alpha:x)$ 为素 $p = \bigcap_{x \notin \mathfrak{q}_i} p_i$

$\overset{(1.11)}{\Rightarrow} p = p_i \in \Sigma$

对 p_i ∵ $p_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} p_j$

$\Rightarrow \exists\ x_i \notin \mathfrak{q}_i,\ x_i \in \mathfrak{q}_j \Rightarrow r(\alpha:x) = p_i$

□

则 $(0:x_i) = (\bar{q}_i : \bar{x}_i)$ 是 $\bar{p}_i$-准素

2. 将 A/α 替代 A 后

$$\bar{0} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{q}_i$$

$\bar{p}_i$ 是 A/α 的元素的零化子之根

注. $\{p_1 \cdots p_n\}$ 称为属于 α 的素理想

对 $\Sigma = \{p_i\}$ 中的极小元.

称为 极小素理想 / 孤立~

其余 称为 嵌入素理想.

命题 $\alpha = \cap q_i$

若 $p \supseteq \alpha$ 则 $p \supseteq \Sigma$ 中一个极小素理想.

Pf. $p = r(p) \supseteq r(\alpha) = \cap p_i$

$\Rightarrow p \supseteq p_i \Rightarrow p \supseteq$ 一个极小素

命题. $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ 极小准素分解

$r(q_i) = p_i$

则 $\bigcup_{i=1}^{n} p_i = \{x \in A : (\alpha : x) \neq \alpha\}$

特别地 对 $0 = \cap q_i$

$\bigcup_{i=1}^{n} p_i = \{x \in A \mid (0:x) \neq 0\} = D$ (零因子集)

若 α 可分解 $\Rightarrow$ $\bar{0} \in A/\alpha$ 可分解

故只需证 后式

$\because D = \bigcup_{x \neq 0} r(0:x)$.

而 $r(0:x) = \bigcap_{x \notin q_i} p_i \subseteq p_i$

$\Rightarrow D \subseteq \cup p_i$

$\exists$ 对 x_i $r(0:x_i) = p_i$

$\Rightarrow \cup p_i \subseteq D$ □

注. 由此. $D = \cup p$
所有 p 属于 0

$\mathfrak{N} = nil(A) = \bigcap\limits_{p \text{为属于}0\text{的极小素}} p$

局部化: 对 q. 为 p 准素

(1) $S \cap p \neq \phi$. 则 $S^{-1}q = S^{-1}A$

(2) $S \cap p = \phi$ 则 $S^{-1}q$ 是 $S^{-1}p$ 准素

且 $(S^{-1}q)^c = q$

即 $S^{-1}A$ 中准素 $\Leftrightarrow$ A 中准素

$S^{-1}q \leftrightarrow q$

Pf: (1) $s \in S \cap p \Rightarrow s^n \in S \cap q$

$\Rightarrow \frac{s^n}{1}$ 为 $S^{-1}q$ 中单位

(2) $q^{ec} = (S^{-1}q)^c = \bigcup_{s \in S} (q : s) = \cup q = q$
双包含

又 $r(q^e) = r(S^{-1}q) = S^{-1}p$ □

记 $S(\alpha) := (S^{-1}\alpha)^c$

命题. $\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ 极小准素分解.

S 与 $p_{m+1}, \cdots p_n$ 相交

则 $S^{-1}\alpha = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1} q_i$, $S(\alpha) = \bigcap_{i=1}^{m} q_i$

证. $\because S \cap p_{m+i} \neq \phi \Rightarrow S^{-1} q_{m+i} = S^{-1}A$

$\Rightarrow S^{-1}\alpha = S^{-1}(\cap q_i) = \bigcap_{i=1}^{n} S^{-1}q_i = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}q_i$

$S(\alpha) = (S^{-1}\alpha)^c = (\bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}q_i)^c = \bigcap_{i=1}^{m} (S^{-1}q_i)^c = \bigcap_{i=1}^{m} q_i$

定义. 对 Σ 为属于 α 的素理想集的子集

$(\Sigma \subseteq \{p_1 \cdots p_n\})$

称为孤立的: 如果 $p' \subseteq p$. 且 $p \in \Sigma$ 有 $p' \in \Sigma$

取 $\{p_1 \cdots p_n\}$ 中的 极小素理想

$\{p_{i_1}, \cdots p_{i_m}\} = \Sigma$, 为孤立的

令 $S = A - \bigcup_{p_i \in \Sigma} p_i$.

则. 对 $p' \in \Sigma$. $p' \cap S = \phi$

$p' \notin \Sigma$. 若 $p' \subseteq \bigcup_{p_i \in \Sigma} p_i$ 则 $p' \subseteq p_i \Rightarrow p' \in \Sigma$ 矛盾 $\Rightarrow p' \cap S$

$\Rightarrow$ 第二唯一性定理.

对 极小素理想 $\{p_{i_1} \cdots p_{i_m}\}$ 其由 α 唯一确定

推论: 对 $q_i \to p_i \in \Sigma$.

q_i 由 α 唯一确定