Ch3.

分式环 分式域

A 环 $S \subseteq A$ 是 乘法封闭子集

（S 是 乘法半群 $1 \in S$）

定义 $A \times S$ 上的 等价关系

$(a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow \exists s' \in S.\ (at-bs)s' = 0$

自反、对称、传递 ✓

记为 $S^{-1}A$

可证，加法，乘法，定义好的

于是形成环结构 称 分式环

$f: A \to S^{-1}A$ 不一定单

$a \mapsto \frac{a}{1}$ （A不一定是整环）

扫描全能王 创建

分式环的泛性质.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & S^{-1}A \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ & B \end{tikzcd}$$

对 $g: A\to B$

若 $g(s)$ 在 B 中可逆. $(\forall s\in S)$

则 $\exists!\ h: S^{-1}A \to B$ 环同态

$h(\frac{a}{s}) = g(a)\, g(s)^{-1}$

使图表交换

唯一性. $h(\frac{a}{1}) = hf(a) = g(a)$

$h(\frac{1}{s}) = h((\frac{s}{1})^{-1}) = (h(\frac{s}{1}))^{-1} = g(s)^{-1}$

$\Rightarrow h(\frac{a}{s}) = g(a)\, g(s)^{-1}$ 由 g 唯一确定

存在性. 即上面 h 的定义

只需验证是环同态 □

推论及性质

1). $s\in S$. $f(s)$ 是 $S^{-1}A$ 中单位

2) $f(a)=0 \Leftrightarrow \exists\ s\in S.\ as=0$

3) $S^{-1}A$ 中所有元素有 $f(a)f(s)^{-1}$ 的形式

$\Downarrow$

同构下唯一! 若 $g: A\to B$ 满足

1). $s\in S$. $g(s)$ 是单位

2) $g(a)=0 \Rightarrow \exists\ s\in S.\ as=0$

3) 所有 B 中元素有 $g(a)g(s)^{-1}$ 形式

则 $h: S^{-1}A \xrightarrow{\sim} B$ 且 $hf=g$

取 $h: \frac{a}{s} \mapsto g(a)g(s)^{-1}$

依次验证 定义好的:

$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2} \Rightarrow u(a_1s_2 - a_2s_1)=0$

$\Rightarrow \underset{\text{可逆}}{g(u)}\, g(a_1s_2 - a_2s_1)=0$

$\Rightarrow g(a_1)g(s_2) = g(a_2)g(s_1)$

单.

满.

环同态. □

例. 1. 令 p 为素理想 $S=A-p$ 乘法封闭

$A_p := S^{-1}A$

$m = \{ \frac{a}{s} \mid a\in p.\ s\notin p \}$ 为极大理想

$\forall \frac{a}{s} \notin m$ $\frac{a}{s}$ 为可逆

$\Rightarrow (A_p, m)$ 为局部环

2. $S=\{f^n\}_{n\geq 0}$ $A_f = \{ \frac{a}{f^n} \mid n\geq 0\}$

3. 若 $0\in S$. 则 $S^{-1}A=0$

4. I 为 A 的理想

$1+I$ 是乘法封闭

5 (1的特例)

$\mathbb{Z}$. (p) $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{n}{m} \mid m\notin p.\ n\in \mathbb{Z}\}$

6. $k[x_1,\cdots x_n]$. p 素

$A_p = \{ \frac{f}{g} \mid \gcd(f,g)=1,\ g\notin p \}$

$V(p) = \{ (a_1,\cdots a_n)\in k^n \mid f(a_1,\cdots a_n)=0\ \forall f\in p \}$

A_p 即为在 $V(p)$ 上处处良好定义的

分式模: M 为 A 模

从 $M\times S$ 定义等价关系

$S^{-1}M$ 是分式模 ($S^{-1}A$-模)

对 $S=A-p$

$S^{-1}M =: M_p$

模同态 $f: M\to N$

诱导分式模同态 $S^{-1}f: S^{-1}M \to S^{-1}N$

$\frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}$

命题. $F: M \to S^{-1}M$ 是正合函子

即. $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ 正合

$\Rightarrow S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ 正合.

① $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(g\circ f) = 0$

② 若 $\frac{g(m)}{s} = \frac{0}{1} \Rightarrow t\,g(m) = 0$

$\Rightarrow g(tm) = 0 \Rightarrow f(m') = tm$

$\Rightarrow \frac{m'}{ts} \longmapsto \frac{mt}{ts} = \frac{m}{s}$ □

推论. 对 $M' \subseteq M$ 子模

$S^{-1}M' \subseteq S^{-1}M$ 是子模

推论. $S^{-1}(N+P) = S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$

$S^{-1}(N\cap P) = S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P)$

$S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}(M)/S^{-1}(N)$

(2): $N\cap P \subseteq N$

$\Rightarrow S^{-1}(N\cap P) \subseteq S^{-1}(N)$

$\Rightarrow S^{-1}(N\cap P) \subseteq S^{-1}(N)\cap S^{-1}(P)$

对 $x = \frac{n}{s} = \frac{p}{t}$

$u(nt-sp) = 0 \Rightarrow w = unt = usp \in N\cap P$

$\Rightarrow x = \frac{n}{s} = \frac{w}{uts}$ $w \in N\cap P$, $uts \in S$ □

命题 M 为 A 模

$S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$ A模同构

$S^{-1}A \times M \to S^{-1}M$

$(\frac{a}{s}, m) \longmapsto \frac{a}{s}m$

是 A-双线性映射

$\Rightarrow S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$

单: $\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \longmapsto \sum_i \frac{a_i m_i}{s_i} = 0$

记 $S = \prod s_i$ $t_i = \frac{s}{s_i}$

$\sum \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m_i$

$= \frac{1}{s} \otimes \sum a_i t_i m_i = \frac{1}{s} \otimes m$

$\Rightarrow \frac{1}{s} m = 0 \Rightarrow \exists t.\ mt = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{s} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = 0$ □

推论: $S^{-1}A$ 为平坦 A-模

$M \xrightarrow{单} N$

$\Rightarrow S^{-1}M \xrightarrow{单} S^{-1}N$

$\Rightarrow S^{-1}A\otimes_A M \xrightarrow{单} S^{-1}A \otimes_A N$ □

命题: M, N 为 A 模

则 $\exists!$ $S^{-1}A$ 模同构

$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \xrightarrow{\sim} S^{-1}(M\otimes N)$

特别地 $M_p \otimes_{A_p} N_p \cong (M\otimes_A N)_p$

问: $S^{-1}(M\otimes N) \to S^{-1}M \otimes S^{-1}N$

需要从构造双线性映射开始吗?

局部性质:

对 A 模 M.

M 成立性质 $P \Leftrightarrow \forall p$素, M_p 成立性质 P

$=0$, 单/满, 平坦 是局部性质

命题. $M=0 \Leftrightarrow \forall p.\ M_p = 0 \Leftrightarrow \forall m.\ M_m = 0$

(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ✓

(3) ⇒ (1) 取 $0 \neq x \in M$

$a = \mathrm{ann}(x) \subseteq m$ 极大

$\Rightarrow M_m = 0 \Rightarrow \frac{x}{1} \in M_m = 0$

$\Rightarrow \exists t.\ tx = 0 \Rightarrow t \in a \subseteq m$ 矛盾

命题. $\phi: M\to N$ 单 $\Leftrightarrow \forall p.\ \phi_p: M_p \to N_p$ 单

$\Leftrightarrow \forall m.\ \phi_m: M_m \to N_m$ 单 (单可换成满)

(1)⇒(2): 由 $0\to M \to N$ 正合

$\Rightarrow 0 \to M_p \to N_p$ 正合

(2)⇒(3) ✓ . (3) ⇒ (1):

由 $0 \to \ker\phi \to M \to N$ 正合

$\Rightarrow (\ker\phi)_m = 0$ $\forall m$ 极大. 成立

$\Rightarrow \ker\phi = 0$

(3)' ⇒ (1)': $M \to N \to N/\mathrm{Im}\phi \to 0$

$\Rightarrow (N/\mathrm{Im}\phi)_m = 0$ $\forall m$ 成立 $\Rightarrow \mathrm{Im}\phi = N$

命题. M 平坦 $\iff \forall p.\ M_p$ 平坦 A_p 模

$\iff \forall m.\ M_m$ 平坦 A_m 模

(1)⇒(2). $M_p \cong A_p \otimes_A M$

而 $A_p \otimes_A M$ 是平坦 A_p 模 (Ex 2.20)

$\Rightarrow M_p$ 平坦 A_p 模

(2)⇒(3) ✓ (3)⇒(1):

$0 \to N \to P$ 正合

$\Rightarrow 0 \to N_m \to P_m$ 正合 $\Rightarrow 0 \to N_m \otimes_{A_m} M_m \to P_m \otimes_{A_m} M_m$ 正合

$\Rightarrow 0 \to (N \otimes_A M)_m \to (P \otimes_A M)_m$ 正合

上式 $\forall m$ 成立 $\Rightarrow 0 \to N \otimes_A M \to P \otimes_A M$ 正合

理想在分式环的扩充. 局限.

$f: A \to S^{-1}A$

$C = A$ 中局限理想 $= \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}$

$E = B$ 中扩理想 $= \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$

$\mathfrak{a}^e = \left\{\sum f(a_i)\frac{b_i}{s_i} = \sum \frac{a_i b_i}{s_i} = \frac{a}{s}\right\} = S^{-1}\mathfrak{a}$

命题. (1) $S^{-1}A$ 中的每个理想 $\in E$

(2) $\mathfrak{a} \subseteq A$, $\mathfrak{a}^{ec} = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$

特别地 $\mathfrak{a}^e = (1) \iff \mathfrak{a} \cap S \neq \phi$

(3) $\mathfrak{a} \in C \iff S$ 中元素不是 $A/\mathfrak{a}$ 的零因子

(4) $S^{-1}A$ 的素理想与 A 的素 一一对应 与 S 不相交

$S^{-1}p \leftrightarrow p$

(5) S^{-1} 与有限和, 交, 积, 根, 交换

证: (1) $\mathfrak{b}^{ce} \subseteq \mathfrak{b}$ 已知

$\forall \frac{x}{s} \in \mathfrak{b} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{x}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathfrak{b}$

$\Rightarrow x \in \mathfrak{b}^c \Rightarrow \frac{x}{s} \in \mathfrak{b}^{ce}$

$= f(x) \cdot \frac{1}{s}$

(2) $x \in \mathfrak{a}^{ec} \iff \frac{x}{1} = \frac{a}{s} \in \mathfrak{a}^e$

$\iff (xs - a)t = 0 \iff tsx \in \mathfrak{a}$

$\iff x \in (\mathfrak{a} : ts) \subseteq \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$

当 $\mathfrak{a}^e = (1) \iff \frac{a}{s} = 1$

$\iff \exists t.\ ta = \overset{\neq 0}{st} \in \mathfrak{a} \cap S$.

(3) $\mathfrak{a} \in C \iff \mathfrak{a}^{ec} \subseteq \mathfrak{a}$

$\iff$ 若 $\frac{x}{1} = \frac{a}{s}$ 则 $x \in \mathfrak{a}$

$\iff$ 若 $txs = a$ 则 $x \in \mathfrak{a}$

$\iff$ 若 $ux \in \mathfrak{a}$ $(u \in S)$ 则 $x \in \mathfrak{a}$

$\iff$ 若 $u\bar{x} = \bar{0}$ 则 $\bar{x} = \bar{0}$

(4) $q \subseteq S^{-1}A$ 为素 $\Rightarrow q^c$ 为素

下证. $p^e = S^{-1}p$ 是素

即证 $S^{-1}A / S^{-1}p$ 整环

由 $0 \to p \to A \to A/p \to 0$

$\Rightarrow 0 \to S^{-1}p \to S^{-1}A \to S^{-1}(A/p) \to 0$

$\therefore S^{-1}A / S^{-1}p \cong S^{-1}(A/p) \subseteq A/p$ 的分式域

$\therefore S^{-1}A / S^{-1}p = 0$ 或为整环

"$=0$" 即 $S^{-1}p = S^{-1}A$ 即 $p \cap S \neq \phi$

(5) $+$. $\cap$ 显然

③ $S^{-1}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = S^{-1}(\mathfrak{a}) \cdot S^{-1}(\mathfrak{b})$

"$\supseteq$" $\sum \frac{a_i}{s_i} \cdot \frac{b_i}{t_i} = \sum \frac{a_i b_i}{s_i t_i}$ 通分即可

"$\subseteq$" $\frac{1}{s} \sum a_i b_i = \sum \frac{a_i}{s} \cdot \frac{b_i}{1}$

④ $S^{-1}(r(\mathfrak{a})) = r(S^{-1}(\mathfrak{a}))$

$\subseteq$ ✓

$\supseteq$: $\frac{b}{s} \in r(S^{-1}(\mathfrak{a})) \Rightarrow \frac{b^k}{s^k} \in S^{-1}(\mathfrak{a})$

$\Rightarrow \frac{b^k}{s^k} = \frac{a}{t} \Rightarrow utb^k = uas^k$

$\Rightarrow (utb)^k = \cdots \in \mathfrak{a} \Rightarrow utb \in r(\mathfrak{a})$

$\Rightarrow \frac{b}{s} = \frac{utb}{uts} \in S^{-1}(r(\mathfrak{a}))$

注：若 f 不是幂零元 取 $S=(f^n)_{n\geq 0}$

$S^{-1}A=A_f$，取 A_f 的极大理想 m.

m^c 是 A 的素 且 $f\notin m^c$

推论. $nil(S^{-1}A)=S^{-1}(nil(A))$

? $\bigcap\limits_{p素} S^{-1}p = S^{-1}(\bigcap\limits_{p素} p) = S^{-1}(nil(A))$

推论. A 中素 p. A_p 与 A 中包含 p 的素一一对应 个素理想

命题 M 有限生成 A 模. S 乘性子集

则 $S^{-1}(Ann(M))=Ann(S^{-1}M)$

Pf: 对 $M=(x)$. 则 $M\cong A/Ann(x)$

$S^{-1}M\cong S^{-1}A/S^{-1}(Ann(x))$

$Ann(S^{-1}M)=Ann\ \underbrace{\qquad}=S^{-1}(Ann(x))=S^{-1}(Ann(M))$

即 对循环模正确

下证. 若 $M.N$ 成立. 则 $M+N$ 成立

$S^{-1}(Ann(M+N))=S^{-1}(Ann M\cap Ann N)$

$=S^{-1}(Ann(M))\cap S^{-1}(Ann(N))$

$=Ann(S^{-1}M)\cap Ann(S^{-1}N)$

$=Ann(S^{-1}M+S^{-1}N)=Ann\, S^{-1}(M+N)$

□

推论. $N.P$ 是 A 模 M 的子模. P 有限生成

则 $S^{-1}(N:P)=(S^{-1}N:S^{-1}P)$

由 $(N:P)=Ann(N+P/N)$

$\Rightarrow S^{-1}(N:P)=S^{-1}Ann(N+P/N)=Ann\, S^{-1}(\ )$

$=Ann(S^{-1}N+S^{-1}P/S^{-1}N)$

$=(S^{-1}N:S^{-1}P)$

推论 $a.b$ 是 A 的理想. 且 b 有限生成

则 $S^{-1}(a:b)=(S^{-1}a:S^{-1}b)$

命题：$f:A\to B$ 环同态. p 是 A 中素

p 是 B 中素在 A 中局限 $\Leftrightarrow p^{ec}=p$

pf: "$\Rightarrow$" $p=q^c$

$\Rightarrow p^{ec}=q^{cec}=q^c=p$

"$\Leftarrow$"

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[r] & S^{-1}B \\ p \arrow[r] & p^e \arrow[r] & p^e(S^{-1}B) \arrow[d, phantom, "\subseteq"] \\ & q_{素} \arrow[ul] & m\ 极大 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$S=f(A-p)$

$p^e\cap S=\phi$: 否则 $y\in S\cap p^e$

$\Rightarrow y=f(x)\in p^e\ x\notin p$

$\Rightarrow x\in p^{ec}=p$ 矛盾

$\therefore$ ~~p^e 在 $S^{-1}B$~~ 的扩理想 是真理想

$\Rightarrow (p^e)^E\subseteq m$ 极大

设 $q=m^E\in B$ 素

$\Rightarrow q\supseteq p^e$ 且 $q\cap S=\phi$

$q^c\cap f^{-1}(S)=\phi$

$\Rightarrow q^c\cap(A-p)=\phi \Rightarrow q^c\subseteq p$

$\Rightarrow q^c=p$ □