模. A. M.

定义.

运算.

例. (1). $\alpha \subseteq A$ 为理想

α 为 A-模. A 为 A-模

(2) A 是域 A-模即线性空间

(3) Abel. 群是 $\mathbb{Z}$-模

(4) $k[x]$. 与线性变换 T

构成模. V^T

$(k[x], V) \longrightarrow V$

$(f(x), v) \longmapsto f(T)(v)$

(5) G 有限群.

$A = k[G]$ 是域 k 上的 G 上群代数

A-模 $=$ G 的 k-表示

(k-representation of G)

$k[G] \times V \longrightarrow V$ 以群同态 $G \to GL(V)$

模同态. $M \to N$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(ax) = af(x)$

$\mathrm{Hom}_A(M, N)$: $M \to N$ 的所有 A-模同态

对 $\mu: M' \to M$

诱导 $\bar{\mu}$: $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N)$

$f \longmapsto f \circ \mu$

对 $v: N \to N''$

诱导 v_* : $\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M, N'')$

$f \longmapsto v \circ f$

F: $M \longmapsto \mathrm{Hom}(M, N)$ 固定 N

反变函子

G: $N \longmapsto \mathrm{Hom}(M, N)$ 固定 M

协变函子

$\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$. $f \mapsto f(1)$

子模和商模

M的子模M'（不变子空间）
(1) M'是M的加法子群
(2) M'在A-模运算封闭

M/M' 商模运算

$(A, M/M') \to M/M'$

$a, m+M' \mapsto am+M'$

第一同构定理. $f: M\to N$

$\ker f$ 是M子模　$\mathrm{Im} f$ 是N子模

$M/\ker f \cong \mathrm{Im} f$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Im} f \\ M/M' \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd} \xrightarrow{\text{推广}} \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "满"] & N \\ M'' \arrow[ur, "\exists \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

使图表交换

对应定理：M'为M子模

{M中包含M'的子模} $\xleftrightarrow{1:1}$ M/M'的子模

（利用群中对应定理 + 验证运算）

子模上运算

和：$M_1+M_2 = \{m_1+m_2 \mid m_i\in M_i\}$

$\sum_{i=1}^n M_i = \{\sum_{i=1}^n m_i \mid m_i\in M_i\}$

$\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_{\text{有限}} m_i \mid m_i\in M_i\}$

交：$\bigcap_{i\in I} M_i$ 是M的子模　$|I|\le\infty$

命题：II：$M_2/M_1\cap M_2 \cong M_1+M_2/M_1$

III：$(M_1\subseteq M_2)$

$(M/M_1)/(M_2/M_1) \cong M/M_2$

注意：证明满射

积. $\alpha M = \{\sum_{\text{有限}} a_i m_i \mid a_i\in\alpha,\ m_i\in M\}$ 是M子模

α是A的理想

商：$(N:P) = \{a\in A \mid aP\subseteq N\}$

是A的理想

对 $N=0$　$(0:P) = \mathrm{Ann}(P)$　（零化子）

若 $\alpha\subseteq \mathrm{Ann}(M)$

M可看成 A/α 模

$(x+\alpha)m = xm+0$　与代表元无关

若对A-模 $\mathrm{Ann}(M)=0$ 称A-模忠实的

对 $A/\mathrm{Ann}(M)$ 模　M是 $A/\mathrm{Ann}(M)$-模 忠实的

命题.1 $\mathrm{Ann}(M+N) = \mathrm{Ann}(M)\cap \mathrm{Ann}(N)$

$(N:P) = \mathrm{Ann}((N+P)/N)$

$x\in M$. $(x) = Ax$ 循环模.

$\sum_{i=1}^n Ax_i = \langle x_1,\dots, x_n\rangle = \{\sum_{i=1}^n a_ix_i \mid a_i\in A\}$

有限生成模

$\sum_{i\in I} Ax_i = \{\sum_{\text{有限}} a_ix_i \mid a_i\in A\}$

直积 直和.

对有限情况　$\bigoplus_{i=1}^n M_i \cong \prod_{i=1}^n M_i$

$M_1\oplus M_2 = \{(x,y) \mid x\in M_1, y\in M_2\}$

无限：$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i\in M_i,\ 仅有限个\neq 0\}$

$\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i\in M_i\}$

注. 对 $A = \prod_{i=1}^n A_i$ 直积,

取 $\alpha_i = (0,\dots,0,a_i,0,\dots,0)$.

$A = \alpha_1\oplus\alpha_2\oplus\cdots\oplus\alpha_n$

有限生成模. 自由模

自由模：$\bigoplus_{i\in I} M_i$. $M_i\cong A$. $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong \bigoplus_{i\in I} A \cong A^{|I|}$

有限生成自由模　$|I|<\infty$. $\cong A^n = A\oplus\cdots\oplus A$

命题. M有限生成A-模 ⟺ M是 A^n 的商模

"⇒"　$M = \sum_{i=1}^n Ax_i$　设 $A^n\to M$, $e_i\mapsto x_i$ ⇒ $A^n/\ker \cong M$

"⇐"　$M\cong A^n/N$

⇒ $A^n \twoheadrightarrow A^n/N \cong M$

$e_i \mapsto \varphi(e_i)$　满. 故

$(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$ 生成M

Hamilton-Cayley定理.

M 有限生成 A-模. α是A的理想

$\phi: M \to M$ 自同态. $\phi(M) \subseteq \alpha M$

则 $\exists\ a_i \in \alpha$. $\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n^{(\mathrm{Id})} = 0$

证: 设 $x_1, \cdots x_n$ 为 M 的生成元

$$\phi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n (\delta_{ij}\phi - a_{ij}) x_j = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \phi - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & & \phi - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \det B \; x_i = 0$ (上式左乘伴随矩阵)

$\Rightarrow$ 由 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 1 \in M \Rightarrow \det B = 0$

展开 B. $\Rightarrow$ 得到原式. □

推论: M 有限生成 A-模 $\alpha \subseteq A$ 理想 $\alpha M = M$

则 $\exists\ x \equiv 1 \pmod{\alpha}$. s.t. $xM = 0$

pf: 取 $\phi = \mathrm{Id}$. $\Rightarrow \phi(M) = M \subseteq M = \alpha M$

$\Rightarrow (\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n) M = 0$

$\Rightarrow (1 + a_1 + \cdots + a_n) . m = 0$

$\Rightarrow x = 1 + a_1 + \cdots + a_n$ 即为所求

命题. (NaKaYaMa 引理).

M 有限生成 A-模. $\alpha \subseteq \mathrm{Jac}(A)$

若 $\alpha M = M$ 则 $M = 0$

利用上推论. $\exists\ x \equiv 1 \pmod{\alpha}$ $xM = 0$

由 $\alpha \subseteq \mathrm{Jac}(A) \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{\mathrm{Jac} A}$

$\Rightarrow x \notin \mathrm{Jac}(A) \Rightarrow x$ 可逆

$\Rightarrow M = x^{-1} x M = 0$

推论. M 有限生成 A-模. $N \subseteq M$. $\alpha \subseteq \mathrm{Jac}(A)$

若 $M = \alpha M + N$ 则 $M = N$

pf. $\alpha(M/N) = (\alpha M + N)/N = M/N$

($m \in M$ 写成 $ay + z$

$\alpha(m + N) = \alpha a y + \alpha z + N \in (\alpha M + N)/N$)

对 (A, m) 为局部环. M 有限生成 A-模

理想 m 零化 M/mM

故将 M/mM 视为 A/m-模

是有限维 A/m-模 线性空间

命题: $\{x_i\}_{i=1}^n$ 是 M 的一组元素

s.t. $\{x_i + mM\}_{i=1}^n$ 是 M/mM 的一组基

则 $\langle x_i \rangle_{i=1}^n$ 生成 M

Pf: 令 $N = \sum_{i=1}^n A x_i$ 为 M 的子模

$\varphi: N \hookrightarrow M \to M/mM$

$x_i \longmapsto x_i + mM$

$\because \{x_i + mM\}$ 构成基

$\Rightarrow \varphi$ 满 $\Rightarrow N + mM = M$

而 $m = \mathrm{Jac}(A) \subseteq \mathrm{Jac}(A)$

利用 NaKaYaMa 引理的推论 □

正合列. $\xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}}$

$\mathrm{Ker} f_{i+1} = \mathrm{Im} f_i$

命题 $M' \to M \to M'' \to 0$ 正合

$\Leftrightarrow 0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N)$ 正合

也即. $M \longmapsto \mathrm{Hom}(M, N)$

为反变左正合函子.

同理. $N \longmapsto \mathrm{Hom}(M, N)$ 为左正合协变函子

蛇形引理

$$\begin{tikzcd}
 & \ker f' \arrow[r] \arrow[d] & \ker f \arrow[r] \arrow[d] & \ker f'' \arrow[dddll, "d"'] \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & N \arrow[r, "v'"] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{coker} f' \arrow[r] & \operatorname{coker} f \arrow[r] & \operatorname{coker} f'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

正合

$$0 \to \ker f' \to \ker f \to \ker f'' \xrightarrow{d} \operatorname{coker} f' \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} f'' \to 0$$

加性函数 λ 满足

将 $\forall$ A-模 M，$\lambda(M) \in \mathbb{Z}$

则对正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$

有 $\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$

特别地，$A = K$ 是域时

$0 \to W \to V \to V/W \to 0$

有 $\lambda(V) = \lambda(W) + \lambda(V/W)$

（λ 可取 dim 函数）

推广到长正合列

$0 \xrightarrow{f_0} M_1 \to \cdots \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} 0$

利用分裂：$0 \to \operatorname{Im} f_i \to M_i \to \operatorname{Im} f_{i+1} \to 0$

$\Rightarrow \lambda(M_i) = \lambda(\operatorname{Im} f_i) + \lambda(\operatorname{Im} f_{i+1})$

有 $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) = 0$

• 张量积

A-双线性映射 $f: M \times N \to P$

有 $f(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{j=1}^{m} b_j y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j f(x_i, y_j)$

即 f 对 x、y 分别是 A-线性映射

注 双线性映射全体 $B(M, N, P)$ 构成 A-模

命题. 设 M, N 为 A-模，则 $\exists$ A-模 T 和双线性 g

$g: M \times N \to T$ 满足

$\forall$ 双线性 $f: M \times N \to P$

$\exists!$ A-线性 $f': T \to P$ s.t. $f = f' \circ g$

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists!\, f'"] \\
 & P
\end{tikzcd}$$

易证 (T, g) 在同构意义下唯一

存在性：$C := A^{M \times N} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i, y_i) \mid i \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ x_i \in M,\ y_i \in N\}$

是自由A-模 $\left(\bigoplus_{(i,j)} A(x_i, y_j)\right)$

取 D 为 C 的子模

由 $\begin{cases} (x+x', y) - (x, y) - (x', y) \\ \quad 对称 \\ (ax, y) - a(x, y) \\ \quad 对称 \end{cases}$ 生成

令 $T = C/D$ 并令 $\pi: C \to T = C/D$

$\qquad (x, y) \mapsto x \otimes y$

由 D 的元素特点：$\begin{cases} (x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \\ (ax) \otimes y = a(x \otimes y) = x \otimes (ay) \end{cases}$

此时取 $g: M \times N \to T$

$\qquad (x, y) \longmapsto x \otimes y$ 是双线性映射

$\forall f: M \times N \to P$ 双线性

诱导 $\bar{f}: C \to P$

$\bar{f}(\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i, y_i)) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i, y_i)$

$\bar{f}(D) = 0$

$\Rightarrow$ 诱导 $f': C/D = T \to P$

$\qquad x \otimes y \longmapsto f(x, y)$

由此. $f' \circ g(x, y) = f'(x \otimes y) = f(x, y)$

$\Rightarrow f = f' \circ g$ 图表交换

$T = M \otimes_A N$

注. (1) 若 M, N 有限生成 $M = \langle X \rangle$, $X = \{x_i\}$

$N = \langle Y \rangle$, $Y = \{y_j\}$

则 $M \otimes_A N$ 有限生成 由 $\{x_i \otimes y_j \mid i, j\}$ 生成

(2) $x \otimes y$ 在 $M \otimes N$ 与 $M' \otimes N'$ 中不一定相同

$(M' \subset M,\ N' \subset N)$

$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ 中. $2 \otimes \bar{1} = 2(1 \otimes \bar{1}) = 1 \otimes \bar{2} = 0$

在 $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ 中. $2 \otimes \bar{1} \neq 0$（不能写成 $2(1 \otimes \bar{1})$，$1 \notin 2\mathbb{Z}$）

注. 若 $\sum x_i \otimes y_i = 0 \in M \otimes N$

则 $\exists$ 有限生成模 M_0, N_0 $\quad \sum x_i \otimes y_i = 0 \in M_0 \otimes N_0$

证：$\because \sum (x_i, y_i) \in D \Rightarrow \sum (x_i, y_i) = \sum a_i ((x_i' + x_i'', y_i) - (x_i', y_i) - (x_i'', y_i))$（有限生成元组合）

M_0 由 x_i 及

右侧出现的第一分量

$x_i' + x_i''$, x_i', x_i'' 生成

N_0 同理.

则 $\sum (x_i, y_i) \in D'$. $\Rightarrow \sum x_i \otimes y_i = 0$

张量积的常见同构　　A模

(1) $M\otimes N \xrightarrow{\sim} N\otimes M$

(2) $(M\otimes N)\otimes P \xrightarrow{\sim} M\otimes N\otimes P \xrightarrow{\sim} M\otimes(N\otimes P)$

(3) $(M\oplus N)\otimes P \xrightarrow{\sim} (M\otimes P)\oplus(N\otimes P)$

(4) $A\otimes_A M \xrightarrow{\sim} M$

$r\otimes m \mapsto rm \underset{m}{\mapsto} (1,m)$

$f: M\to M'$, $g: N\to N'$ 为 A-模同态

$M\times N \longrightarrow M'\otimes N'$

$(x,y) \mapsto f(x)\otimes g(y)$ 双线性

诱导 $M\otimes N \longrightarrow M'\otimes N'$

$(f\otimes g)(x\otimes y) = f(x)\otimes g(y)$

进一步：$f': M'\to M''$. $g': N'\to N''$

$(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)(x\otimes y)$

$= f'f(x)\otimes g'g(y)$

而 $(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)(x,y)$

$=(f'\otimes g')(f(x)\otimes g(y)) =$ 上式

$\Rightarrow (f'\circ f)\otimes(g'\circ g) = (f'\otimes g')\circ(f\otimes g)$

纯量的局限和扩充：

$f: A\to B$ 为环同态，N 是 B-模

$\Rightarrow N$ 是 A-模：$an = f(a)n$

特别地，环 B 具有 A模结构

命题：N 是有限生成 B模

B是有限生成 A模

则 N是有限生成 A模

证：设 $N=\sum_{j=1}^{m} By_j$

$B=\sum_{i=1}^{n} Ax_i$

$\Rightarrow N=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Ax_iy_j$

生成元 (x_iy_j)

$M_B = B\otimes_A M$ 是 A模（M为A-模）

M_B 是 B模：

$B\times M_B \to M_B$

$(b', b\otimes x) \mapsto b'b\otimes x$

命题：M是有限生成 A-模

$f: A\to B$ 环同态

$\Rightarrow M_B = B\otimes_A M$ 作为 B模 有限生成

证：$M=\sum_{i=1}^{n} Ax_i$

$\Rightarrow b\otimes_A x = b\otimes_A(\sum a_i x_i)$

$=\sum a_i(b\otimes_A x_i)$

$=\sum(a_ib)(1\otimes_A x_i)$

作为 B模 由 $\{1\otimes_A x_i\}$ 生成

张量积的正合性：

引理. $Hom(M\otimes N, P) \cong Hom(M, Hom(N,P))$

只需证 ① $Bl(M,N;P) \cong Hom(M\otimes N, P)$

② $Bl(M,N;P) \cong Hom(M, Hom(N,P))$

①：固定 $x\in M$

$f_x: N\mapsto P$　　$f_x\in Hom(N,P)$

$y\mapsto f(x,y)$

$\Rightarrow \phi: Bl(M,N;P) \to Hom(M, Hom(N,P))$

$f \mapsto \phi(f): x\mapsto f_x$

ϕ 模同态

且 $\phi(f)=0 \Rightarrow f_x=0 \ \forall x \Rightarrow \forall x,y\ f(x,y)=0 \Rightarrow f=0$

满：$\psi\in Hom(M, Hom(N,P))$

取 $f=\psi(x)(y)$ 双线性

且 $\phi(f)=\psi$

②
$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists! f'"] \\ & P \end{tikzcd}$$
图表交换

故同构

命题. $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ 正合

$\Rightarrow \forall N$ 为 A 模 (右正合协变函子)

$M'\otimes N \xrightarrow{f\otimes 1} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} M''\otimes N \to 0$ 正合

证. $\downarrow$ 正合 $\Leftrightarrow \forall P$ 为 A 模

$0 \to Hom(M'\otimes N, P) \to Hom(M\otimes N, P) \to Hom(M''\otimes N, P)$ 正合

$\cong \quad \cong \quad \cong$

$0 \to Hom(M'', Hom(N,P)) \to \cdots$

由已知条件. 则为 $Hom(N,P)$ 为 A 模

$M \mapsto Hom(M, Hom(N,P))$ 为反变左正合函子. $\square$

注. $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ 正合 $\not\Rightarrow 0 \to M'\otimes N \to M\otimes N$ 正合

例 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 取 $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\quad t \mapsto 2t$

$\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2$

$x\otimes y \mapsto 2x\otimes y = 0$

即 $\ker(f\otimes 1) = \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2$ 但正合 $\ker f\otimes 1 = 0$ 矛盾

平坦 A-模

定义. N 是 ~ $\Leftrightarrow$

若 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ 正合

则 $M'\otimes N \xrightarrow{f\otimes 1} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} M''\otimes N$ 正合

命题. (1) N 是平坦 A-模

(2) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 正合
$\Rightarrow 0 \to M'\otimes N \to M\otimes N \to M''\otimes N \to 0$ 正合

(3) $M' \to M$ 单 $\Rightarrow M'\otimes N \to M\otimes N$ 单

(4) $\forall M' \to M$ 单 且 M', M 有限生成模

有 $M'\otimes N \to M\otimes N$ 单

(1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (1) 对 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ 正合

$\Rightarrow 0 \to f(M') \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{g} g(M) \to 0$ 正合

$\overset{(2)}{\Rightarrow} 0 \to f(M')\otimes N \xrightarrow{\iota\otimes 1} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} g(M)\otimes N \to 0$ 正合

$\Rightarrow \ker(g\otimes 1) = Im(\iota\otimes 1)$

$= f(M')\otimes N$

$= Im(f\otimes 1)$

$\Rightarrow M'\otimes N \to M\otimes N \to M''\otimes N$ 正合

(3) $\Rightarrow$ (4) 是显然

(4) $\Rightarrow$ (3)

$f: M' \to M$ 单 $\quad f\otimes 1: M'\otimes N \to M\otimes N$

取 $u = \sum_i x_i \otimes y_i \quad (f\otimes 1)(u) = 0$

取 M_0' 由 x_i 生成的子模 $\subseteq M'$

又 $\sum_i f(x_i)\otimes y_i = 0$

$\exists M_0 \subseteq M$. 有限生成

且 $\sum_i f(x_i)\otimes y_i = 0 \in (M_0\otimes N_0) \subseteq M_0\otimes N$

取 $f_0 = f|_{M_0'}: M_0' \to M_0$ 单

由 (4). $M_0'\otimes N \to M_0\otimes N$ 单

对 $u_0 = \sum_i x_i\otimes y_i \in M_0'\otimes N$

$\therefore$ 像是 $0 \Rightarrow u_0 = 0 \in M_0'\otimes N$ 从而 $\subseteq M'\otimes N$

代数 B 称为 A-代数

$\Leftrightarrow f: A \to B$ 环同态. B 有 A 模结构

且相容

$abb' = (ab)b' = b(ab')$

例. (1) $k[x_1, \cdots, x_n]$ 为 k 代数

(2) A 环是 $\mathbb{Z}$ 代数

$f: \mathbb{Z} \to A$
$\quad n \mapsto n\cdot 1_A$

定义: 代数同态.

B, C 为 A 代数.

$h: B \to C$ 代数同态.

① h 环同态

② h 是 A-模同态

① $\begin{cases} h(b_1+b_2) = h(b_1)+h(b_2) \\ h(b_1\cdot b_2) = h(b_1)\cdot h(b_2) \end{cases}$

②: $h(ab) = a h(b)$

性质: h 为 A 代数 $\Leftrightarrow h\circ f = g$

"$\Rightarrow$" $h(ab) = a h(b) = g(a)\, h(b)$

$\| \quad h(f(a)b) = hf(a)\, h(b)$ 取 $b = 1_B$.

"$\Leftarrow$" 只需证 $h(ab) = a h(b)$ $\square$

定义：$f: A \to B$ 环同态，B 为 A 代数

1) B 有限 A-代数 $\Leftrightarrow$ B 作为 A 模有限生成

f 称有限的

2) 若 $\exists\, x_1, \cdots x_n \in B$.

使 $\forall b \in B$. $b \in f(A)[x_1, \cdots x_n]$

则 B 为有限生成 A-代数

f 称为有限型的

（此时有代数同态

$A[t_1 \cdots t_n] \to B$ ）

3) 环 A 有限生成的 $\Leftrightarrow$ 作为 $\mathbb{Z}$ 代数有限生成

例 $A = \mathbb{Q}$. $B = \mathbb{Q}[\alpha]$

① α 为代数数（f. 首一. $f(\alpha) = 0$）

$\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}[\alpha] \cong \mathbb{Q}[x]/(f(x))$

B 作为 A 模，由 $(1, \alpha, \cdots \alpha^{n-1})$ 生成

是有限 A-代数

② α 超越数

$[\mathbb{Q}[\alpha]: \mathbb{Q}] = +\infty$

$\mathbb{Q}[\alpha]$ 有限生成 A 代数 (α)

不是有限 A 代数 $(1, \alpha, \cdots)$

③ α 超越

$\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}(x)$ 不是有限生成 A-代数

$(1, x, \cdots)$

代数的张量积

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \wr & B \otimes_A C \\ & C \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$B \times C \times B \times C \to B \otimes_A C = D$

$\Downarrow$

$B \otimes C \otimes B \otimes C \to D$

$\Downarrow$

$(B \otimes C) \otimes (B \otimes C) \to D$ 即 $D \times D \to D$

$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$

可证. D 为含幺 $(1_B \otimes 1_C)$ 交换环

相容性: $a(b \otimes c)(b' \otimes c')$

$= (b \otimes c)\, a(b' \otimes c')$

上图表交换

$f(a) \otimes 1_C = a 1_B \otimes 1_C = 1_B \otimes a 1_C = 1_B \otimes g(a)$

□

Ch3.

分式环 分式域

A 环. $S \subseteq A$ 是乘法封闭子集

（S 是乘法半群. $1 \in S$）

定义 $A \times S$ 上的等价关系

$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists\, s' \in S.\ (at - bs)s' = 0$

反. 对称. 传递 ✓

记为 $S^{-1}A$

可证. 加法. 乘法. 定义好的

于是形成环结构 称. 分式环

$f: A \to S^{-1}A$

$a \mapsto \frac{a}{1}$

不一定单

（A 不一定是整环）