Ch10. 完备化.

Cauchy 列. (x_ν).

$\forall$ 0 的邻域 U. $\exists\ s(U) \in \mathbb{Z}$

$\forall\ \mu, \nu \geq s(U)$ 有 $x_\mu - x_\nu \in U$

$R = \{(x_n) \mid (x_n)$ 为 $\mathbb{Q}$ 中 Cauchy 列$\}$

$m = \{(x_n) \in R \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$

$\mathbb{R} = R/m$

例. p-adic

$\mathbb{Q}_p = \{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n p^n \mid a_i \in \{0, \cdots, p-1\}\}$

$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

反向极限: 对 $\{A_n\}$ 及 $\theta_{n+1}: A_{n+1} \to A_n$

(a_n) 满足 $\theta_{n+1} a_{n+1} = a_n$

称为逆向极限, 记为 $\varprojlim A_n$

$\hat{G} \triangleq \varprojlim G/G_n$ ($\hat{G}$ 为 G 的完备化)

分次环.

A (ring) 与 $(A_n)_{n\geq 0}$ 为 A 的加法子群

满足 $\begin{cases} A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n \\ A_m A_n \subseteq A_{m+n} & \forall\ m, n \geq 0 \end{cases}$

因此. A_0 为环. A_n 为 A_0 模

例. $A = k[x_1, \cdots, x_r]$.

A_n 为 n 次齐次多项式全体.

分次环上的模.

分次A模 M. 与其加法子群 $(M_n)_{n\geq 0}$

$M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$. $A_m M_n \subseteq M_{m+n}$.

M_n 为 A_0 模

齐次: x 称为齐次. 如果 $\exists n$. $x \in M_n$

$\forall\ y \in M$. $y = \sum_{n\geq 0} y_n$ y_n 齐次元 $\in M_n$

(有限和)

M, N 为分次 A 模. 分次 A 模同态

$f: M \to N$ 是 $\begin{cases} ① & A\text{模同态} \\ ② & f(M_n) \subseteq N_n \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

$A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n$. 为 A 的理想

命题. 对分次环 A. 下述等价

(1) A 是诺特环

(2) A_0 是诺特环. 且 A 为有限生成 A_0 代数

"$\Rightarrow$" $A_0 \cong A/A_+ \Rightarrow A_0$ 诺特环

$\because$ A_+ 为 A 的理想 有限生成

设 $A_+ = (x_1, \cdots, x_s)$

其中 x_i 的次数为 k_i (>0)

记 $A' = A_0[x_1, \cdots, x_s]$

$A' \subseteq A$ 显然

下证 $A \subseteq A'$ 即 $A_n \subseteq A'$ $\forall n$

$\forall\ y \in A_n \subseteq A_+ \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i$

($a_i \in A_{n-k_i}$)

利用归纳法可知 由 $n-k_i \leq n-1$

a_i 可写成 x_i 的线性组合

$\Rightarrow y$ 可写成 x_i 的多项式

$\Rightarrow y \in A'$

$\Rightarrow A_n \subseteq A'$ ..

"$\Leftarrow$" 利用 Hilbert's 基定理 即证 $\square$

对 A 环，非分次环，α 为 A 的理想

可定义分次环 $A^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha^n$. $(\alpha^0 = A)$

若 M 为 A 模，(M_n) 为 M 的 α 滤链。

$M^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ 为分次 A^* 模。$(\alpha^m M_n \subseteq M_{m+n})$

若 A 诺特 $\Rightarrow \alpha$ 有限生成 $(x_1, \dots x_r)$

则 $A^* = A[x_1, \dots x_r]$ 是诺特环

A 模 M 的 α 滤链。

$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots$ M_n 为 M 的子模

是 α 滤链 $\Leftrightarrow \alpha M_n \subseteq M_{n+1}$ $\forall n \geq 0$

是稳定 α 滤链 $\Leftrightarrow \alpha M_n = M_{n+1}$ 对 n 充分大

Lemma. (M_n), (M_n') 均为 M 的稳定 α 滤链

则它们存在有界差：

$\exists n_0$. $\begin{cases} M_{n+n_0} \subseteq M_n' \\ M_{n+n_0}' \subseteq M_n \end{cases}$ $\forall n \geq 0$

证. 取充分大的 n_0. M_{n+n_0} 与 M_{n+n_0}' 稳定

$M_{n_0} \subseteq M_0' = M$
$M_{n_0}' \subseteq M_0 = M$ 成立

$\begin{cases} M_{n_0+1} = \alpha M_{n_0} \subseteq \alpha M \subseteq M_1 \\ M_{n_0+1}' = \alpha M_{n_0+1}' \subseteq \alpha M \subseteq M_1' \end{cases}$

利用归纳法即知成立。

引理 A 为诺特环，M 有限生成 A 模

(M_n) 为 M 的 α 滤链。下述等价

(1) M^* 是有限生成 A^* 模

(2) (M_n) 稳定

$\because$ $M_n \subseteq M$ 为诺特模

$\Rightarrow M_n$ 有限生成

$\Rightarrow Q_n = \bigoplus_{r=0}^{n} M_r$ 有限生成

Q_n 是 M^* 的子群，(不一定是 A^* 模)

记 $M_n^* = M_0 \oplus \dots \oplus M_n \oplus \alpha M_n \oplus \alpha^2 M_n \dots$

由 Q_n 有限生成

$\Rightarrow M_n^*$ 为有限生成 A^* 模

由 $M_1^* \subseteq M_2^* \subseteq \dots$

且 $M^* = \bigcup_{n \geq 1} M_n^*$

由 A^* 为诺特环

$\Rightarrow M^*$ 有限生成 A^* 模 $\Leftrightarrow$

链稳定

即 $\exists n_0$ $M^* = M_{n_0}^*$

$\Leftrightarrow M_{n_0+r} = \alpha^r M_{n_0}$ $\forall r \geq 0$

$\Leftrightarrow$ 滤链稳定

介绍 Artin-Rees 引理.

A 诺特环 $\alpha \trianglelefteq A$. M 有限生成 A模

(M_n) 为 M 的稳定 α 滤链

若 $M' \subseteq M$. 子模. 则

$(M' \cap M_n)$ 为 M' 的稳定 α 滤链

证. $\alpha(M' \cap M_n) \subseteq \alpha M' \cap \alpha M_n \subseteq M' \cap M_{n+1}$

$\therefore$ $(M' \cap M_n)$ 为 M' 的 α 滤链

由此定义了 分次 A^* 模, 且是 M^* 的子模 再由 A^* 诺特 $\Rightarrow$ 有限生成

引理 $\Rightarrow$ 是稳定滤链

取 $M_n = \alpha^n M$. 可得 特殊形式

$$(\alpha^n M) \cap M' = \alpha^{n-k}\left((\alpha^k M) \cap M'\right)$$

对 $n \geq k$ 成立

另一方面. 使用该命题和有界差引理.

Thm. A 诺特环. $\alpha \trianglelefteq A$. M 为 f.g. A模

$M' \subseteq M$ 则 $(\alpha^n M')$ 及 $(\alpha^n M) \cap M'$

有有界差

相伴分次环

A 环. $\alpha \trianglelefteq A$.

$$G(A) = G_\alpha(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha^n / \alpha^{n+1} \quad (\alpha^0 := A)$$

是分次环. 且

$$\overline{x_m}\ \overline{x_n} = \overline{x_m x_n}.$$

类似地 M 为 A模 (M_n) 为 M 的滤链

$$G(M) = \bigoplus_{n \geq 0}^{\infty} M_n / M_{n+1}$$

是分次 $G(A)$ 模. $G_n(M) := M_n / M_{n+1}$

命题 A 为诺特环. 则

(1) $G_\alpha(A)$ 为诺特环

(2) 若 M 有限生成 A模

(M_n) 为 M 的稳定 α-滤链

则 $G(M)$ 为 有限生成 $G(A)$ 模

(1): A 诺特 $\Rightarrow \alpha = (x_1, \cdots x_s)$ 有限生成

$\overline{x_i} = x_i + \alpha / \alpha^2$

$\Rightarrow G(A) = (A/\alpha)[\overline{x_1}, \cdots \overline{x_s}]$

由 A/α 诺特. $\Rightarrow G(A)$ 诺特.

(2) 设 $M_{n_0+r} = \alpha^r M_{n_0}$ $(\forall r \geq 0)$

则 $G(M)$ 由 $\bigoplus_{n \leq n_0} G_n(M)$ 生成

又 $G_n(M) = M_n / M_{n+1}$ 为诺特模

且被 α 零化

$\Rightarrow$ 是 有限生成 A/α 模

$\Rightarrow$ $\bigoplus_{n \leq n_0} G_n(M)$ 由有限元素生成

$\Rightarrow$ $G(A)$ 是 有限生成 $G(A)$ 模