Chapter 1. Module.

习题 1.1.

设X是模M的子集. 证明X所生成的子模

$$\langle X\rangle = \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S.$$

其中

$$\mathcal{F} = \{S\text{是}M\text{的子模} : X\subseteq S\}.$$

Proof. 1) 由例1.11.(7)知，$\bigcap\limits_{S\in\mathcal{F}} S$是$M$的子模.

2) 由于R是含幺交换环，因此$X\subseteq\langle X\rangle\subseteq M$，从而$\langle X\rangle\in\mathcal{F}$，故

$$\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S\subseteq\langle X\rangle.$$

3) $\langle X\rangle\subseteq\bigcap\limits_{S\in\mathcal{F}} S$.

否则，$\langle X\rangle-\bigcap\limits_{S\in\mathcal{F}} S\neq\varnothing$. 从而，存在

$$x_1,\cdots,x_n\in X,\qquad r_1,\cdots,r_n\in R$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n} r_ix_i\in\langle X\rangle-\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S.$$

但

$$x_1,\cdots,x_n\in X\subseteq\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S,\qquad r_1,\cdots,r_n\in R.$$

由(1)知，$\bigcap\limits_{S\in\mathcal{F}} S$是$R$-模，故

$$\sum_{i=1}^{n} r_ix_i\in\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S.$$

矛盾.

综合(2)(3)知

$$\langle X\rangle=\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S.$$

□

习题 1.2.

设R是交换环，J是R的理想. 对于R-模M，证明M/JM在数乘

$$(r+J)(m+JM)=rm+JM, \qquad \forall r+J\in R/J, \quad \forall m+JM\in M/JM$$

下是R/J-模. 由此推出：

1) 如果$JM=\{0\}$，则M自身是R/J-模；
2) 特别地，如果J是R的极大理想且$JM=\{0\}$，则M是R/J上的线性空间.

Proof. 1) 由例1.11.(5)知

$$JM=\Big\{\sum_{i=1}^{n} r_i m_i : r_i\in J,\ m_i\in M,\ n\in\mathbb{N}\Big\}$$

是M的子模，从而是R-模，于是M/JM也是R-模.

2) 数乘的合理性.

由于J是R的理想，因此R/J也是含幺交换环. $\forall r_1+J=r_2+J\in R/J$，$\forall m_1+JM=m_2+JM\in M/JM$

$$\begin{aligned} r_1m_1-r_2m_2&=(r_1m_1-r_2m_1)+(r_2m_1-r_2m_2)\\ &=(r_1-r_2)m_1+r_2(m_1-m_2). \end{aligned}$$

由于$r_1-r_2\in J$，$m_1\in M$，因此$(r_1-r_2)m_1\in JM$；由于$(m_1-m_2)\in JM$，$r_2\in R$，而JM是R-模，因此$r_2(m_1-m_2)\in JM$. 故$(r_1m_1-r_2m_2)\in JM$. 于是

$$(r_1+J)(m_1+JM)=r_1m_1+JM=r_2m_2+JM=(r_2+J)(m_2+JM).$$

即数乘的定义是合理的. 容易验证，M/JM在上述数乘的定义下是一个R/J- 模.

3) 若$JM=\{0\}$，则$M/JM\cong M$，从而M本身构成一个R/J模；若J还是R的极大理想，则R/J是一个域，从而M是域R/J上的线性空间. □

习题 1.3.

对于R-模M，证明

$$\varphi_M:\mathrm{Hom}_R(R,M)\longrightarrow M, \qquad f\mapsto f(1)$$

是R-同构.

Proof. 1) 由命题1.8知，$\mathrm{Hom}_R(R,M)$是R-模.

2) φ_M是单射.

$\forall f,g\in\mathrm{Hom}_R(R,M)$，若

$$f(1)=\varphi_M(f)=\varphi_M(g)=g(1).$$

那么，$\forall r\in R$，由于f,g是R-同态，因此

$$f(r)=r\cdot f(1)=r\cdot g(1)=g(r).$$

从而，$f\equiv g$. 故φ_M是单射.

3) φ_M是满射.

$\forall m \in M$，令

$$f_m : R \longrightarrow M, \qquad r \mapsto rm.$$

容易验证，$f_m \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$且

$$\varphi_M(f_m) = f_m(1) = 1 \cdot m = m.$$

于是，$\varphi_M^{-1}(m) = f_m$，从而，φ_M是满射.

4) φ_M是R-同态.

$\forall r.s \in R$，$\forall f, g \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$

$$\begin{aligned}\varphi_M(r \cdot f + s \cdot g) &= (r \cdot f + s \cdot g)(1)\\ &= (r \cdot f)(1) + (s \cdot g)(1)\\ &= r \cdot \big(f(1)\big) + s \cdot \big(g(1)\big)\\ &= r \cdot \varphi_M(f) + s \cdot \varphi_M(g).\end{aligned}$$

综合(1)(2)(3)知，φ_M是R-同构. □

习题 1.4.

设R为整环，$f(x) \in R[x]$是次数为n的首一多项式. 证明$R[x]/\big(f(x)\big)$是秩为n的自由R-模.

Proof. R是整环，$f(x)$是$R[x]$中的首一多项式，可做带余除法：$\forall g(x) \in R[x]$，存在$q(x), r(x) \in R[x]$使得

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x).$$

其中，$r(x) \equiv 0$或$\deg\big(r(x)\big) < n$. 注意到

$$g(x) - r(x) = q(x)f(x) \in \big(f(x)\big).$$

因此

$$g(x) + \big(f(x)\big) = r(x) + \big(f(x)\big).$$

从而

$$R[x]/\big(f(x)\big) = \big\{r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_1x + r_0 + \big(f(x)\big) : r_i \in R,\ 0 \le i \le n-1\big\}.$$

令

$$S = \big\{\overline{1}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}^{n-1}\big\} = \big\{1 + \big(f(x)\big), x + \big(f(x)\big), \cdots, x^{n+1} + \big(f(x)\big)\big\}.$$

则S是$R[x]/\big(f(x)\big)$的一组基，即

$$R[x]/\big(f(x)\big) = \langle S \rangle.$$

故$R[x]/\big(f(x)\big)$是秩为n的自由模. □

Remark. 整环的条件可以去掉.

Proof. 令$\overline{x} := x + \big(f(x)\big)$，则$R[\overline{x}] \cong R[x]/\big(f(x)\big)$. 显然

$$f(\overline{x}) = f(x) + \big(f(x)\big) = \overline{0}.$$

故$\overline{x}$在R上整. 由命题2.43.(2)的证明知，$R[\overline{x}]$由$\{\overline{1}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}^{n-1}\}$生成.

若存在$b_0,\cdots,b_{n-1}\in R$使得

$$b_{n-1}\overline{x}^{n-1}+\cdots+b_1\overline{x}+b_0\cdot\overline{1}=\overline{0}.$$

那么

$$b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0+\big(f(x)\big)=\overline{0}.$$

故

$$g(x):=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0\in\big(f(x)\big).$$

但

$$\deg\big(g(x)\big)\leq n-1<n=\deg\big(f(x)\big).$$

故$g(x)\equiv 0$. 从而，$b_0=\cdots=b_{n-1}=0$. 因此

$$\{\overline{1},\overline{x},\cdots,\overline{x}^{n-1}\}$$

是$R[\overline{x}]$的一组基. 从而，$R[\overline{x}]\cong R[x]/\big(f(x)\big)$是秩为$n$的自由$R$-模. □

习题 1.5.

设

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$$

是模同态序列. 证明:

$$gf=0\Longleftrightarrow \mathrm{im}f\subseteq\ker g.$$

给出一个非正合这样的序列的例子.

Proof. $g\circ f=0\Longleftrightarrow$

$$g\big(f(a)\big)=(g\circ f)(a)=0,\qquad \forall a\in A.$$

$\Longleftrightarrow \mathrm{im}f\subseteq\ker g$.

例子：设$\mathbb{Q},\mathbb{R}$为$\mathbb{Z}$-模，则

$$\mathbb{Q}\xrightarrow{i}\mathbb{R}\to 0$$

满足要求. □

习题 1.6.

设

$$0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$$

是模同态的短正合列. 若M为任意模，证明存在正合序列

$$0\to A\oplus M\rightarrowtail B\oplus M\twoheadrightarrow C\to 0$$

及

$$0\to A\rightarrowtail B\oplus M\twoheadrightarrow C\oplus M\to 0.$$

Proof. 1) 令$f_1:A\oplus M\longrightarrow B\oplus M$

$$f_1(a+m)=f(a)+m,\qquad \forall a\in A,\ m\in M.$$

容易验证，f_1是模同态. 若

$$f(a_1)+m_1=f_1(a_1+m_1)=f_1(a_2+m_2)=f(a_2)+m_2,$$

则

$$f(a_1-a_2)+(m_1-m_2)=0.$$

由于零的表示是唯一的，且f是单射，因此

$$m_1=m_2,\qquad a_1=a_2.$$

从而，f_1是单射.

令$g_1: B\oplus M\longrightarrow C$

$$g_1(b+m)=g(b),\qquad \forall b\in B,\ m\in M.$$

容易验证，g_1是模同态，且为满射. 若

$$g_1(b+m)=g(b)=0,$$

则

$$b\in\ker g=\mathrm{im} f\subseteq B.$$

从而

$$\ker g_1=\ker g\oplus M=\mathrm{im} f\oplus M=\mathrm{im} f_1.$$

于是

$$0\to A\oplus M\xrightarrow{f_1}B\oplus M\xrightarrow{g_1}C\to 0$$

正合.

2) 令$f_2: A\longrightarrow B\oplus M$

$$f_2(a)=f(a),\qquad \forall a\in A.$$

容易验证，f_2是模同态，且为单射.

令$g_2: B\oplus M\longrightarrow C\oplus M$

$$g_2(b+m)=g(b)+m,\qquad \forall b\in B,\ m\in M.$$

容易验证，g_2是模同态，且为满射. 若

$$g_2(b+m)=g(b)+m=0,$$

则由于零的表示唯一，因此，$m=0$，且

$$b\in\ker g=\mathrm{im} f=\mathrm{im} f_2.$$

故

$$\ker g_2=\ker g=\mathrm{im} f=\mathrm{im} f_2.$$

于是

$$0\to A\xrightarrow{f_2}B\oplus M\xrightarrow{g_2}C\oplus M\to 0$$

正合. □

习题 1.7.

设V_i，$0 \le i \le n$是有限维k-线性空间

$$0 \to V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \to \cdots V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$$

是k-线性空间正合列. 证明:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim_k V_i = 0.$$

Proof. 注意到

$$V_i/\ker f_i \cong \mathrm{im} f_i = \ker f_{i+1}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

由有限维线性空间的维数公式知

$$\dim_k V_i = \dim_k \ker f_i + \dim_k \ker f_{i+1}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \dim_k V_i =& \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \dim_k \ker f_i + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \dim_k \ker f_{i+1} \\ =&(-1)^0 \dim_k \ker f_0 + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+1} \dim_k \ker f_{i+1} + \\ & \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i \dim_k \ker f_{i+1} + (-1)^{n-1} \dim_k \ker f_n \\ =&0 - \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i \dim_k \ker f_{i+1} + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i \dim_k \ker f_{i+1} + (-1)^{n-1} \dim_k V_n \\ =&(-1)^{n-1} \dim V_n.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim_k V_i =& \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \dim_k V_i + (-1)^n \dim_k V_n \\ =&(-1)^{n-1} \dim V_n + (-1)^n \dim_k V_n \\ =&0.\end{aligned}$$

□

Remark. 对于任意一个正合列

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''.$$

总有分解

$$0 \to \ker f \to M' \to \mathrm{im} f \to 0.$$

$$0 \to \ker g \to M \to \mathrm{im} g \to 0.$$

$$\mathrm{im} f = \ker g.$$

可以利用这一点来解决此命题.

习题 1.8.

设$f : M \longrightarrow N$是模同态. 证明：

1) f为满同态$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{coker} f = \{0\}$；
2)
$$0 \to \ker f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker} f \to 0$$
正合.

Proof. 1) f为满同态$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{im} f = N \Longleftrightarrow \mathrm{coker} f = N/\mathrm{im} f = N/N = \{0\}$.

2) 由于$\mathrm{im} i = \ker f$，因此M处正合. 由于$\ker \pi = \mathrm{im} f$，因此N处正合. □

习题 1.9.

若
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$
为正合列. 证明：f为满射当且仅当h为单射.

Proof.
$$f\text{为满射} \Longleftrightarrow \ker g = \mathrm{im} f = B \Longleftrightarrow \ker h = \mathrm{im} g = g(B) = g\big(f(A)\big) = \{0\}.$$
□

习题 1.10.

证明：短正合列
$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$
分裂当且仅当存在同态$q : B \longrightarrow A$，使得$qi = 1_A$.

Proof. $\Longrightarrow$) 若上述正合列分裂，则存在同态$j : C \longrightarrow B$ 使得$p \circ j = \mathrm{id}_C$. 并且，$j : C \longrightarrow B$是单同态.

我们证明：
$$B = \mathrm{im} i \oplus \mathrm{im} j.$$

$\forall b \in B$
$$b = \big(b - jp(b)\big) + jp(b).$$
显然，$jp(b) \in \mathrm{im} j$. 由于
$$p\big(b - jp(b)\big) = 0.$$
故
$$b - jp(b) \in \ker p = \mathrm{im} i.$$
于是
$$B = \mathrm{im} i + \mathrm{im} j.$$

$\forall x \in \mathrm{im} i \cap \mathrm{im} j$，存在$a \in A$与$c \in C$使得
$$i(a) = x = j(c).$$

于是

$$c = pj(c) = p(x) = pi(a) = 0.$$

故

$$x = j(c) = 0.$$

于是

$$\mathrm{im} i \cap \mathrm{im} j = \{0\}.$$

注意到，$i : A \longrightarrow B$，$j : C \longrightarrow B$都是单射. 因此

$$A \cong \mathrm{im} i, \qquad C \cong \mathrm{im} j.$$

从而

$$B \cong A \oplus C.$$

令$q : B \longrightarrow A$

$$i(a) + j(c) \longmapsto a.$$

那么

$$q \circ i = 1_A.$$

$\Longleftarrow$) 若存在同态$q : B \longrightarrow A$，使得$q \circ i = 1_A$，则q为满同态.

我们证明：

$$B = \ker q \oplus \ker p.$$

$\forall b \in B$

$$b = \big(b - iq(b)\big) + iq(b).$$

由于

$$q\big(b - iq(b)\big) = 0, \qquad piq(b) = 0.$$

故

$$b - iq(b) \in \ker q, \qquad iq(b) \in \ker p.$$

于是

$$B = \ker q + \ker p.$$

$\forall x \in \ker q \cap \ker p = \ker q \cap \mathrm{im} i$，存在$a \in A$ 使得$x = i(a)$. 此时

$$a = qi(a) = q(x) = 0.$$

故

$$x = i(a) = 0.$$

于是

$$\ker q \cap \ker p = \{0\}.$$

因此

$$B \cong \ker q \oplus \ker p.$$

$\forall c \in C$，存在$b \in B$使得$c = p(b)$. 令$j : C \longrightarrow B$

$$c \longmapsto b - iq(b).$$

那么

$$pj(c) = p\big(b - iq(b)\big) = p(b) = c.$$

故

$$p \circ j = 1_C.$$

特别地，此时也有

$$B \cong A \oplus C.$$

$\square$

Remark. 1) 对于短正合列

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

$$\text{存在}q\text{使得}q \circ i = \mathrm{id}_A \Longleftrightarrow \text{存在}j\text{使得}p \circ j = \mathrm{id}_C.$$

注意，尽管

$$\text{存在}q\text{使得}q \circ i = \mathrm{id}_A \Longrightarrow B \cong A \oplus C, \qquad \text{存在}j\text{使得}p \circ j = \mathrm{id}_C \Longrightarrow B \cong A \oplus C.$$

但

$$B \cong A \oplus C \nRightarrow \text{存在}q\text{使得}q \circ i = \mathrm{id}_A, \qquad B \cong A \oplus C \nRightarrow \text{存在}j\text{使得}p \circ j = \mathrm{id}_C.$$

反例如下：

设循环群$A = (a)$，$B = (b)$的阶分别是二和四. 令$i : A \longrightarrow B$

$$a \longmapsto 2b.$$

令$p : B \longrightarrow A$

$$b \longmapsto a.$$

则有$\mathbb{Z}$-模正合列

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \to 0.$$

由于$B \ncong A \oplus A$，因此，上述正合列不分裂.

$\forall M \in \mathcal{Z}$-mod，总有正合列

$$0 \to A \xrightarrow{i \oplus 0} B \oplus M \xrightarrow{p \oplus \mathrm{id}_M} A \oplus M \to 0.$$

显然，它也不分裂. 特别地，取

$$M = (A \oplus B) \oplus (A \oplus B) \oplus \cdots.$$

则

$$A \oplus M \cong M \cong B \oplus M.$$

此时，上述正合列的中间项为两边项的直和，但它不分裂.

2) 按照上述方法，我们可以证明：对任意一个投射模P，都存在一个自由模Q使得$P \oplus Q$是自由模.

Proof. 由于P是投射模，存在Q'使得$P \oplus Q'$是自由模. 令

$$Q = (P \oplus Q') \oplus (P \oplus Q') \oplus \cdots.$$

那么Q是自由模且$P \oplus Q$也是自由模. $\square$

习题 1.11.

1) 证明映射$\varphi : B \longrightarrow C$为单射，当且仅当对任意的$f, g : A \longrightarrow B$

$$\varphi \circ f = \varphi \circ g \Longrightarrow f = g.$$

2) 证明映射$\varphi : B \longrightarrow C$为满射，当且仅当对任意的$h, k : C \longrightarrow D$

$$h \circ \varphi = k \circ \varphi \Longrightarrow h = k.$$

Proof. 1) 若$\varphi : B \longrightarrow C$为单射，当$\varphi \circ f = \varphi \circ g$ 时

$$\varphi\big(f(a)\big) = \varphi\big(g(a)\big) \Longrightarrow f(a) = g(a), \qquad \forall a \in A.$$

从而$f \equiv g$.

若$\varphi : B \longrightarrow C$不是单射，则存在$b_1 \neq b_2$，使得

$$\varphi(b_1) = \varphi(b_2).$$

取$f, g : A \longrightarrow B$，满足

$$f(a) = b_1, \qquad g(a) = b_2$$

对某个$a \in A$成立. 其余各处，f, g的取值相同. 此时，显然有

$$\varphi \circ f = \varphi \circ g,$$

但$f \neq g$.

2) 若$\varphi : B \longrightarrow C$为满射，当$h \circ \varphi = k \circ \varphi$ 时，$\forall c \in C$，存在$b \in B$使得$\varphi(b) = c$，从而

$$h(c) = h\big(\varphi(b)\big) = k\big(\varphi(b)\big) = k(c), \qquad \forall c \in C.$$

故$h \equiv k$.

若$\varphi : B \longrightarrow C$不是满射，则$C - \mathrm{im}\varphi \neq \varnothing$. 取$h, k : C \longrightarrow D$满足

$$h\big|_{\mathrm{im}\varphi} = k\big|_{\mathrm{im}\varphi},$$

但对于某个$c \in C - \mathrm{im}\varphi$

$$h(c) \neq k(c).$$

此时

$$h \circ \varphi = k \circ \varphi,$$

但$h \neq k$. □

习题 1.12. (Chinese Remainder Theorem).

设A_i，$1 \leq i \leq n$是R的理想，且满足对任意$1 \leq i \neq j \leq n$，$A_i + A_j = R$. 设M是R-模. 证明映射

$$\varphi : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} M/A_iM,$$
$$m \mapsto (m + A_1M, \cdots, m + A_nM)$$

诱导同构

$$M \Big/ \Big(\prod_{i=1}^{n} A_i\Big) M \cong \prod_{i=1}^{n} M/A_iM.$$

Proof. 1) $n=2$时命题成立.

设$A+B=R$，则存在$a\in A$，$b\in B$使得

$$1=a+b.$$

$\forall m_1,m_2\in M$

$$\begin{aligned}\varphi(bm_1+am_2)=&b\varphi(m_1)+a\varphi(m_2)\\=&(bm_1+AM,bm_1+BM)+(am_2+AM,am_2+BM)\\=&(bm_1+AM,0)+(0,am_2+BM)\\=&\big((1-a)m_1+AM,(1-b)m_2+BM\big)\\=&(m_1+AM,m_2+BM).\end{aligned}$$

于是，φ是满射. 由于$AB\subseteq A\cap B$，且$\forall x\in A\cap B$

$$x=1\cdot x=(a+b)x=ax+bx\in AB.$$

故$AB=A\cap B$. 显然

$$\ker\varphi=AM\cap BM=(A\cap B)M=(AB)M.$$

由同态基本定理

$$M/\ker\varphi\cong\mathrm{im}\varphi\Longrightarrow M\big/(AB)M\cong(M/AM)\times(M/BM).$$

2) 设$n-1$时，命题成立，即

$$M\Big/\Big(\prod_{i=1}^{n-1}A_i\Big)M\cong\prod_{i=1}^{n-1}M/A_iM.$$

令$A=A_n$，$B=\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}A_i$，则$A,B$都是$R$的理想. 由于

$$A_n+A_i=R,\qquad\forall 1\le i\le n-1.$$

因此，存在$a_i\in A_n$，$b_i\in A_i$使得

$$1=a_i+b_i,\qquad\forall 1\le i\le n-1.$$

从而

$$1=(a_1+b_1)\cdots(a_{n-1}+b_{n-1})\in A_n+\prod_{i=1}^{n-1}A_i=A+B.$$

故$A+B=R$. 由(1)知

$$M\big/(AB)M\cong(M/AM)\times(M/BM).$$

由于$AB=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}A_i$且

$$M/(BM)=M\Big/\Big(\prod_{i=1}^{n-1}A_i\Big)M\cong\prod_{i=1}^{n-1}M/A_iM.$$

由数学归纳法知，原命题对所有的正整数n成立. □

Remark. 特别地，若M平坦，则直接对环上的中国剩余定理作张量积，可立刻得到该结论.

$$R\Big/\Big(\prod_{i=1}^{n}A_i\Big)\cong\prod_{i=1}^{n}R/A_i.$$

作张量积可得

$$M\Big/\Big(\prod_{i=1}^{n}A_i\Big)M\cong\Big[R\Big/\Big(\prod_{i=1}^{n}A_i\Big)\Big]\otimes_R M\cong\Big(\prod_{i=1}^{n}R/A_i\Big)\otimes_R M\cong\prod_{i=1}^{n}\left(R/A_i\otimes_R M\right)\cong\prod_{i=1}^{n}M/A_iM.$$

习题 1.13.

设$f:M\longrightarrow N$，$g:M\longrightarrow 0$和$h:0\longrightarrow N$是R-模同态. 试求f与g的推出和f与h的拉回.

Proof. 1) 由例1.66.(3)知

$$N\amalg_M\{0\}=(N\oplus\{0\})/S\cong N/S.$$

其中

$$S=\big\{\big(f(m),-g(m)\big):m\in M\big\}=\big\{\big(f(m),0\big):m\in M\big\}\cong\mathrm{im}f.$$

从而

$$N\amalg_M\{0\}\cong N/\mathrm{im}f=\mathrm{coker}f.$$

令

$$\begin{aligned}\alpha_1:N\longrightarrow N\amalg_M\{0\},\qquad & n\mapsto(n,0),\\ \alpha_2:\{0\}\longrightarrow N\amalg_M\{0\},\qquad & 0\mapsto(0,0).\end{aligned}$$

则$\big(N\amalg_M\{0\};\alpha_1,\alpha_2\big)$是$f$与$g$的推出.

2) 由例1.66.(2)知

$$M\times_N\{0\}=\big\{(m,0)\in M\oplus\{0\}:f(m)=h(0)=0\big\}\cong\ker f.$$

令

$$\begin{aligned}p_1:M\times_N\{0\}\longrightarrow M,\qquad & (m,0)\mapsto m,\\ p_2:M\times_N\{0\}\longrightarrow\{0\},\qquad & (m,0)\mapsto 0.\end{aligned}$$

则$\big(M\times_N\{0\};p_1,p_2\big)$是$f$与$h$的拉回. □

Remark. 例：设$f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，$g:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$为自然映射. 求$f,g$的push-out.

Proof. 令

$$S=\{(z+n\mathbb{Z},-z+m\mathbb{Z}):z\in\mathbb{Z}\}.$$

作映射$\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$$m\longmapsto(z+n\mathbb{Z},-z+m\mathbb{Z}).$$

则φ是$\mathbb{Z}$模同态. 显然

$$S=\mathrm{im}\varphi\cong\mathbb{Z}/\ker\varphi=\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}.$$

其中，$l=\operatorname{lcm}(m,n)$. 此时

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/S\cong&\frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}}\cong\frac{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})}{(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})}\\ \cong&\frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}/(l/m)\mathbb{Z}}\cong\frac{\mathbb{Z}}{(nm/l)\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

其中，$d=\gcd(m,n)$. □

事实上，若N_i是M_i的子模，那么

$$\Big(\bigoplus_{i\in I}M_i\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{i\in I}N_i\Big)\cong\bigoplus_{i\in I}(M_i/N_i).$$

Proof. 作映射$\varphi:\bigoplus_{i\in I}M_i\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}(M_i/N_i)$

$$(m_i)\longmapsto(m_i+N_i).$$

则φ是满射且$\ker\varphi=\bigoplus_{i\in I}N_i$. 于是，$\varphi$诱导同构

$$\Big(\bigoplus_{i\in I}M_i\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{i\in I}N_i\Big)\cong\Big(\bigoplus_{i\in I}M_i\Big)\Big/\ker\varphi\cong\bigoplus_{i\in I}(M_i/N_i).$$

□

这个题目告诉我们，pull-back和push-out很可能与kernel和cokernel有关. 下面我们来讨论一下Abel范畴中的pull-back和push-out.

1) $R\times_T S$为f,g的pull-back，$R\oplus S\cong R\times S$为R,S 的上积与积.

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dr, "f"] & \\
R\times_T S \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & T \\
 & S \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}\qquad
\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "\eta_1"'] \arrow[dr, "f"] & \\
R\oplus S \arrow[rr, dashed, "\sigma"] & & T \\
 & S \arrow[ul, "\eta_2"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}\qquad
\begin{tikzcd}
 & R & \\
R\times_T S \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "-\beta"'] \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & R\times S \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

将其合并为

$$\begin{tikzcd}
 & & R \arrow[d, shift left, "\eta_1"] \arrow[dr, "f"] & \\
0 \arrow[r, dashed] & R\times_T S \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "-\beta"'] \arrow[r, "\tau"] & R\oplus S \arrow[u, shift left, "\pi_1"] \arrow[d, shift left, "\pi_2"] \arrow[r, "\sigma"] & T \\
 & & S \arrow[u, shift left, "\eta_2"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

2) 可以用到的条件.

$$\alpha=\pi_1\tau,\qquad -\beta=\pi_2\tau.$$

$$f=\sigma\eta_1,\qquad g=\sigma\eta_2.$$

$$\pi_1\eta_1=\mathrm{id}_R,\quad \pi_1\eta_2=0,\quad \pi_2\eta_1=0,\quad \pi_2\eta_2=\mathrm{id}_S.$$

$$\mathrm{id}_{R\oplus S} = \eta_1\pi_1 + \eta_2\pi_2.$$

$$f\alpha + g(-\beta) = f\alpha - g\beta = 0.$$

3) $(R \times_T S, \tau) = \ker \sigma$.

设$(X, \tau') = \ker \sigma$，则

$$\sigma\tau = \sigma \mathrm{id}_{R\oplus S}\tau = \sigma(\eta_1\pi_1 + \eta_2\pi_2)\tau = (f\pi_1 + g\pi_2)\tau = f\alpha - g\beta = 0.$$

由$\ker \sigma$的泛性质，存在$h' : R \times_T S \longrightarrow X$使得

$$\tau = \tau' h'.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & R \arrow[d, shift left, "\eta_1"] \arrow[dr, "f"] & \\
0 \arrow[r, dashed] & R\times_T S \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, dashed, "h'"'] \arrow[dr, "-\beta"'] & R\oplus S \arrow[u, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, shift left, "\pi_2"] & T \\
 & X \arrow[ur, "\tau'"] & S \arrow[u, shift left, "\eta_2"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

由于

$$f\pi_1\tau' + g\pi_2\tau' = \sigma\eta_1\pi_1\tau' + \sigma\eta_2\pi_2\tau' = \sigma(\eta_1\pi_1 + \eta_2\pi_2)\tau' = \sigma\tau' = 0.$$

故

$$f\pi_1\tau' = -g\pi_2\tau'.$$

由pull-back的泛性质，存在$h : X \longrightarrow R \times_T S$使得

$$\pi_1\tau' = \alpha h, \qquad -\pi_2\tau' = \beta h.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "\pi_1\tau'"] \arrow[ddr, bend right, "-\pi_2\tau'"'] & & \\
 & R\times_T S \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & R \arrow[d, "f"'] \\
 & S \arrow[r, "g"] & T
\end{tikzcd}$$

现在，$hh' : R \times_T S \longrightarrow R \times_T S$. 并且

$$f\alpha hh' = f\pi_1\tau' h' = -g\pi_2\tau' h' = g\beta hh'.$$

由pull-back的泛性质知，使得下图交换的$\varphi : R \times_T S \longrightarrow R \times_T S$是唯一的.

$$\begin{tikzcd}
R\times_T S \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\alpha\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "\beta\varphi"'] & & \\
 & R\times_T S \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & R \arrow[d, "f"'] \\
 & S \arrow[r, "g"] & T
\end{tikzcd}$$

显然，$\mathrm{id}_{R\times_T S}$与$hh'$都满足条件. 故

$$hh' = \mathrm{id}_{R\times_T S}.$$

对于$h'h : X \longrightarrow X$

$$\sigma\tau' h' h = 0.$$

由ker的泛性质，使得下图交换$\psi : X \longrightarrow X$是唯一的.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\tau'"] & R\oplus S \arrow[r, "\sigma"] & T \\
 & X \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "\tau'\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

显然，$h'h$与$\mathrm{id_X}$满足条件. 故

$$h'h = \mathrm{id_X}.$$

1) $R \amalg_T S$为f,g的push-out，$R\oplus S \cong R\times S$为$R,S$ 的上积与积.

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dr, "\alpha"] & \\
T \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & R\amalg_T S \\
 & S \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "\eta_1"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
R\oplus S \arrow[rr, dashed, "\sigma"] & & R\amalg_T S \\
 & S \arrow[ul, "\eta_2"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & R & \\
T \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "-g"'] \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & R\times S \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

将其合并为

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[d, shift left, "\eta_1"] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
T \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "-g"'] & R\oplus S \arrow[u, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, shift left, "\pi_2"] & R\amalg_T S \arrow[r, dashed] & 0 \\
 & S \arrow[u, shift left, "\eta_2"] \arrow[ur, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

2) 可以用到的条件.

$$f = \pi_1\tau, \qquad -g = \pi_2\tau.$$

$$\alpha = \sigma\eta_1, \qquad \beta = \sigma\eta_2.$$

$$\pi_1\eta_1 = \mathrm{id}_R, \quad \pi_1\eta_2 = 0, \quad \pi_2\eta_1 = 0, \quad \pi_2\eta_2 = \mathrm{id}_S.$$

$$\mathrm{id}_{R\oplus S} = \eta_1\pi_1 + \eta_2\pi_2.$$

$$\alpha f + \beta(-g) = \alpha f - \beta g = 0.$$

3) $(R\amalg_T S, \sigma) = \mathrm{coker}\tau$.

设$(X,\sigma') = \mathrm{coker}\tau$，则

$$\sigma\tau = \sigma \mathrm{id}_{R\oplus S}\tau = \sigma(\eta_1\pi_1 + \eta_2\pi_2)\tau = (\alpha\pi_1 + \beta\pi_2)\tau = \alpha f - \beta g = 0.$$

由cokerτ的泛性质，存在$h' : X \longrightarrow R\amalg_T S$ 使得

$$\sigma = h'\sigma'.$$

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[d, shift left, "\eta_1"] \arrow[rd, "\alpha"] & & \\
T \arrow[ru, "f"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[rd, "-g"'] & R \oplus S \arrow[u, shift left, "\pi_1"] \arrow[d, shift left, "\pi_2"] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rd, "\sigma'"] & R \amalg_T S \arrow[r, dashed] & 0 \\
& S \arrow[u, shift left, "\eta_2"] \arrow[ru, "\beta"'] & X \arrow[u, dashed, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

由于

$$\sigma'\eta_1 f + \sigma'\eta_2 g = \sigma'(\eta_1 f + \eta_2 g) = \sigma'(\eta_1\pi_1\tau + \eta_2\pi_2\tau) = \sigma'(\eta_1\pi_1 + \eta_2\pi_2)\tau = \sigma'\tau = 0.$$

故

$$\sigma'\eta_1 f = -\sigma'\eta_2 g.$$

由push-out的泛性质，存在$h : R \amalg_T S \longrightarrow R \times_T X$使得

$$\pi_1\tau' = \alpha h, \qquad -\pi_2\tau' = \beta h.$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "-g"] & R \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[rdd, bend left, "\sigma'\eta_1"] & \\
S \arrow[r, "\beta"] \arrow[rrd, bend right, "\sigma'\eta_2"'] & R \amalg_T S \arrow[rd, dashed, "h"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

类似的，再次利用coker和push-out的泛性质，我们有

$$hh' = \mathrm{id}_X, \qquad h'h = \mathrm{id}_{R\amalg_T S}.$$

可以看到，在Abel范畴中，pull-back和push-out就是某个kernel和cokernel.

习题 1.14.

在R-模范畴中证明：

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

为正合列当且仅当对任意R-模N

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N, M'').$$

是正合列. 其中

$$f_* : \mathrm{Hom}_R(N, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M), \qquad h \mapsto fh,$$
$$g_* : \mathrm{Hom}_R(N, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M''), \qquad h \mapsto gh.$$

Proof. $\Longrightarrow$) 1) f_*是单射. 从而，$\mathrm{Hom}_R(N, M')$处正合.

$\forall h_1', h_2' \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$，若

$$fh_1' = f_*h_1' = f_*h_2' = fh_2',$$

则f是单射给出

$$h_1' = h_2'.$$

从而，f_*是单射.

2) $\mathrm{im} f_* = \ker g_*$. 从而，$\mathrm{Hom}_R(N, M)$处正合.

由于

$$g_* f_*(h) = gfh = 0.$$

因此，$\mathrm{im} f_* \subseteq \ker g_*$.

$\forall h \in \ker g_*$

$$g_*(h) = gh = 0.$$

于是

$$\mathrm{im} h \subseteq \ker g = \mathrm{im} f.$$

从而，$\forall n \in N$，存在唯一的$m' \in M'$使得

$$f(m') = h(n).$$

令$h' : N \longrightarrow M'$

$$n \mapsto m'.$$

则$\forall r_1, r_2 \in R$，$\forall n_1, n_2 \in N$

$$h(r_1 n_1 + r_2 n_2) = r_1 h(n_1) + r_2 h(n_2) = r_1 f(m'_1) + r_2 f(m'_2) = f(r_1 m'_1 + r_2 m'_2).$$

这说明

$$h'(r_1 n_1 + r_2 n_2) = r_1 m'_1 + r_2 m'_2 = r_1 h'(n_1) + r_2 h'(n_2).$$

此时，$h' \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$且

$$f_* h'(n) = fh'(n) = f(m') = h(n), \qquad \forall n \in N.$$

故$\mathrm{im} f_* \supseteq \ker g_*$.

$\Longleftarrow$) 1) f是单射. 从而，M'处正合.

$\forall h'_1, h'_2 \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$，若

$$fh'_1 = f_* h'_1 = f_* h'_2 = fh'_2,$$

则f_*是单射给出

$$h'_1 = h'_2.$$

从而，f是单射.

2) $\mathrm{im} f = \ker g$. 从而，M处正合.

取$N = M'$，$h' = 1_{M'} \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$，则

$$0 = g_* f_*(1_{M'}) = gf1_{M'} = gf.$$

从而，$\mathrm{im} f \subseteq \ker g$.

取$N = \ker g$，$h \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$为嵌入映射，则$\mathrm{im} h = \ker g$. 从而

$$g_* h = gh = 0.$$

故

$$h \in \ker g_* = \mathrm{im} f^*.$$

于是，存在$h' \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$使得

$$h = f_* h' = fh'.$$

这说明

$$\ker g = \mathrm{im} h = \mathrm{im}(fh') \subseteq \mathrm{im} f.$$

$\square$

Remark. 事实上，由习题1.3知，取$N = R$，则第一行正合列可诱导第二行正合列.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R, M') \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi_{M'}"'] & \mathrm{Hom}_R(R, M) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & \mathrm{Hom}_R(R, M'') \arrow[d, "\varphi_{M''}"] \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M''
\end{tikzcd}$$

该命题的对偶命题为：

$$M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

为正合列当且仅当对任意R-模N

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(M', N).$$

是正合列. 其中

$$\begin{aligned}
i^* : \mathrm{Hom}_R(M, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', N), \qquad h \mapsto hi, \\
p^* : \mathrm{Hom}_R(M'', N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N), \qquad h \mapsto hp.
\end{aligned}$$

Proof. $\Longleftarrow$) 1) p是满射，从而M''处正合.

取$N = M''/\mathrm{im}p$，$f : M'' \twoheadrightarrow N$为自然映射，则

$$p^*(f) = fp = 0.$$

由于p^*是单射，从而$f = 0$. 故$N = M''/\mathrm{im}p = \{0\}$. 于是，$p$是满射.

2) $\mathrm{im}i = \ker p$，从而M处正合.

令$N = M''$，$g = \mathrm{id}_N$. 则$g \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$且

$$0 = i^*p^*(g) = gpi = pi.$$

故$\mathrm{im}i \subseteq \ker p$.

取$N = M/\mathrm{im}i$，$h : M \longrightarrow N$为自然映射. 则

$$i^*h = hi = 0.$$

于是，$h \in \ker i^*$，存在$h' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$使得

$$h = p^*(h') = h'p.$$

若$\mathrm{im}i \neq \ker p$，则$\ker p - \mathrm{im}i \neq \varnothing$. 取$b \in \ker p - \mathrm{im}i$，则$p(b) = 0$且$h(b) \neq 0$. 但

$$h(b) = h'p(b) = 0.$$

这就产生了矛盾. 故$\mathrm{im}i = \ker p$.

$\Longrightarrow$) 1) p^*是单射，从而$\mathrm{Hom}_R(M'', N)$处正合.

$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$，若

$$f_1 p = p^*(f_1) = p^*(f_2) = f_2 p.$$

则由p是满射，从而

$$f_1 = f_2.$$

故p^*是单射.

2) $\mathrm{im} p^* = \ker i^*$，从而$\mathrm{Hom}_R(M, N)$处正合.

$\forall f \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$

$$i^* \circ p^*(f) = fpi = 0.$$

从而，$\mathrm{im} p^* \subseteq \ker i^*$.

若$g \in \ker i^*$，$\forall x' \in M'$

$$gi(x') = i^* g(x') = 0.$$

$\forall x'' \in M$，由于p是满射，存在$x \in M$使得

$$x'' = p(x).$$

令

$$f : M'' \longrightarrow N, \quad x'' \longmapsto g(x).$$

若$p(x_1) = p(x_2) = x''$，则

$$p(x_1 - x_2) = 0.$$

从而，$x_1 - x_2 \in \ker p$. 存在$x' \in M'$使得

$$i(x') = x_1 - x_2.$$

此时

$$g(x_1) - g(x_2) = g(x_1 - x_2) = gi(x') = 0.$$

从而，$g(x_1) = g(x_2)$. 故f的定义是合理的. 容易验证，f是R-模同态：对于$r_1 x_1'' + r_2 x_2''$，存在x_1, x_2使得

$$p(x_1) = x_1'', \qquad p(x_2) x_2''.$$

从而

$$f(x_1'') = g(x_1), \qquad f(x_2'') = g(x_2)$$

此时

$$p(r_1 x_1 + r_2 x_2) = r_1 p(x_1) + r_2 p(x_2) = r_1 x_1'' + r_2 x_2''.$$

故

$$f(r_1 x_1'' + r_2 x_2'') = g(r_1 x_1 + r_2 x_2) = r_1 g(x_1) + r_2 g(x_2) = r_1 f(x_1'') + r_2 f(x_2'').$$

显然，由f的定义知，$\forall x \in M$

$$p^*(f)(x) = fp(x) = g(x).$$

从而，$g = p^*(f) \in \mathrm{im} p^*$. 于是，$\mathrm{im} p^* \supseteq \ker i^*$.

综上所述，$\mathrm{im} p^* = \ker i^*$. □

在证明“$\mathrm{im} f_* \supseteq \ker g_*$”时，我们可以使用$M' \cong \ker g$的泛性质.

$\forall h \in \ker g_* \subseteq \mathrm{Hom}_R(N, M)$

$$g_*(h) = gh = 0.$$

从而

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \\ & N \arrow[u, dashed, "\exists| h'"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

由$M' \cong \ker g$的泛性质知，存在唯一的$h' \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$使得

$$h = fh' = f_*(h') \in \mathrm{im} f_*.$$

在证明“$\mathrm{im} f = \ker g$”时，我们可以使用泛性质说明$M' \cong \ker g$.

$\forall h \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$，若$gh = g_*(h) = 0$，则

$$h \in \ker g_* = \mathrm{im} f_*.$$

由于f_*是单射，存在唯一的$h' \in \mathrm{Hom}_R(N, M')$使得

$$h = f_*(h') = fh'.$$

从而，下图交换.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \\ & N \arrow[u, dashed, "\exists| h'"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

由h与N的任意性知，$M' \cong \ker g$. 从而，f是单射且$\mathrm{im} f = \ker g$.

在证明“$\mathrm{im} i = \ker p$”时，我们可以使用泛性质说明$M'' \cong \mathrm{coker} i$.

$\forall h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$，若$hi = i^*(h) = 0$，则

$$h \in \ker i^* = \mathrm{im} p^*.$$

由于p^*是单射，存在唯一的$h'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$使得

$$h = p^*(h'') = h''p.$$

从而，下图交换.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "h"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists| h''"] & 0 \\ & & N & \end{tikzcd}$$

由h与N的任意性知，$M'' \cong \mathrm{coker} i$. 从而，$p$是满射且$\mathrm{im} i = \ker p$.

在证明“$\mathrm{im} p^* \supseteq \ker i^*$”时，我们可以使用$M'' \cong \mathrm{coker} i$的泛性质.

$\forall h \in \ker i^* \subseteq \mathrm{Hom}_R(M, N)$

$$0 = i^*(h) = hi.$$

从而

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "h"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists| h''"] & 0 \\ & & N & \end{tikzcd}$$

由$M'' \cong \mathrm{coker} i$的泛性质知，存在唯一的$h'' \in \mathrm{M}'', \mathrm{N}$使得

$$h = h''p = p^*(h'') \in \mathrm{im} p^*.$$

这两个命题说明

$$\mathrm{Hom}_R(N, -), \qquad \mathrm{Hom}_R(-, N)$$

分别是协变函子和反协变函子，它们都是左正合的，但都不是右正合的.

$\mathrm{Hom}_R(N, -)$不是右正合含子的反例：

取$N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 对于$\mathbb{Z}$-模正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

由于$\mathbb{Q}$没有二阶元，故

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = \{0\}.$$

但

$$\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

是二阶元. 因此，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \neq \{0\}$. 从而，右端不是满射. 这说明，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 不是投射$\mathbb{Z}$-模.

$\mathrm{Hom}_R(-, N)$不是右正合含子的反例：

取$N = \mathbb{Z}$. 对于$\mathbb{Z}$-模正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

由于$\mathbb{Q}$是无限生成$\mathbb{Z}$-模，而$\mathbb{Z}$是有限生成$\mathbb{Z}$-模，故

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}.$$

但

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

因此，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$. 从而，右端不是满射. 这说明，$\mathbb{Z}$不是内射$\mathbb{Z}$-模.

习题 1.15. (Five Lemma).

考虑如下R-模交换图表

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r, "p_4"] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "q_1"] & N_2 \arrow[r, "q_2"] & N_3 \arrow[r, "q_3"] & N_4 \arrow[r, "q_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

其中行都是正合列. 证明：

1) 若f_1是满射，而f_2与f_4是单射，则f_3是单射.
2) 若f_5是单射，而f_2与f_4是满射，则f_3是满射.
3) 若f_1, f_2, f_4, f_5是同构，则f_3是同构.

Proof. 1) 取$n_3\in N_3$，若$n_3=0$，则$n_4=q_3(n_3)=0$.
由于f_4是单射，从而，n_4的原像$m_4=f^{-1}(n_4)=0$.
由于$m_4\in\ker p_4=\mathrm{im}p_3$，从而，存在$m_3\in M_3$使得$p_3(m_3)=0$.
由于$m_3\in\ker p_3=\mathrm{im}p_2$，从而，存在$m_2\in M_2$使得$p_2(m_2)=m_3$.
由$f_3\big(p_2(m_2)\big)=q_2\big(f_2(m_2)\big)$知，存在$n_2=f_2(m_2)$ 使得$q_2(n_2)=n_3=0$.
由于$n_2\in\ker q_2$，从而，存在$n_1\in N_1$使得$q_1(n_1)=n_2$.
由于f_1是满射，从而，存在$m_1\in M_1$使得$f_1(m_1)=n_1$.
由于$q_1\big(f_1(m_1)\big)=f_2\big(p_1(m_1)\big)$知，存在$m_2'=p_1(m_1)$使得$f_2(m_2')=n_2$.
由于f_2是单射，因此$m_2=m_2'=p_1(m_1)$.
从而，$m_3=p_2(m_2)=p_2\big(p_1(m_1)\big)=0$.
于是，$n_3=0$关于f_3的原像只有$m_3=0$.
从而f_3是单射.

2) 取$n_3\in N_3$，则$n_4=q_3(n_3)$满足，$q_4(n_4)=q_4\big(q_3(n_3)\big)=0$.
由于f_4是满射，从而，存在$m_4\in M_4$使得$f_4(m_4)=n_4$.
由$q_4\big(f_4(m_4)\big)=f_5\big(p_4(m_4)\big)$知，存在$m_5\in M_5$使得$m_5=p_4(m_4)$且$f_5(m_5)=0$.
由于f_5是单射，从而，$m_5=0$. 故$m_4\in\ker p_4=\mathrm{im}p_3$.
从而，存在$m_3'\in M_3$使得$p_3(m_3')=m_4$.
令$n_3'=f_3(m_3')$. 由$q_3(n_3')=q_3\big(f_3(m_3')\big)=f_4\big(p_3(m_3')\big)=n_4$知，$q_3(n_3-n_3')=q_3(n_3)-q_3(n_3')=0$.
由于$n_3-n_3'\in\ker q_3=\mathrm{im}q_2$，从而，存在$n_2'\in N_2$使得$q_2(n_2')=n_3-n_3'$.
由于f_2是满射，从而，存在$m_2'\in M_2$使得$f_2(m_2')=n_2'$.
令$m_3=m_3'+p_2(m_2')$，则$f_3\big(m_3'+p_2(m_2')\big)=f_3(m_3')+f_3\big(p_2(m_2')\big)=n_3'+q_2\big(f_2(m_2')\big)=n_3$.
于是，$m_3'+p_2(m_2')$是n_3关于f_3的原像.
从而，f_3是满射.

3) 由(1)(2)知，f_3既单又满，从而是同构. □

Remark. 一个有趣的例子：考虑$\mathbb{Z}$模交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & 0 \arrow[d, "f_5"'] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

若存在同态$f_3:\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，由(3)知，$f_3$是同构. 这显然不可能.

习题 1.16.

1) 证明同构一定是双射.
2) 证明在集合范畴$\mathcal{S}$ets中，双射也是同构.

Proof. 1) 若态射$f:A\longrightarrow B$是同构，则存在态射$g:B\longrightarrow A$使得

$$fg=\mathrm{id}_B,\qquad gf=\mathrm{id}_A.$$

由于id_B是满射，从而f是满射；由于id_A是单射，从而f是单射. 故f是双射.

2) 在集合范畴$\mathcal{S}$ets中，若态射$f:A\longrightarrow B$是双射，则其逆映射$g=f^{-1}:B\longrightarrow A$也是态射，且满足

$$fg=\mathrm{id}_B,\qquad gf=\mathrm{id}_A.$$

故f是同构. □

习题 1.17.

设$\mathcal{A}$是Abel范畴. $\mathcal{A}$的链复形范畴$C(\mathcal{A})$如下给出：

- $C(\mathcal{A})$的对象是链复形

$$A^\bullet = \cdots \to A^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} A^i \xrightarrow{d_i} A^{i+1} \to \cdots.$$

其中

$$d_i d_{i-1} = 0, \qquad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

- $C(\mathcal{A})$的态射$f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ 是$\mathcal{A}$中的态射族$f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. 其中

$$f_i : A^i \longrightarrow B^i, \qquad f_{i+1} d_i^A = d_i^B f_i.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}^A"] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & A_i \arrow[r, "d_i^A"] \arrow[d, "f_i"'] & A_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}^B"] & B_i \arrow[r, "d_i^B"] & B_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

证明$C(\mathcal{A})$也是Abel范畴.

Proof. 1) $\mathcal{A}$的链复形范畴$C(\mathcal{A})$是一个范畴.

其中，对象的两两不交性和结合律是自然成立的. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A^\bullet, A^\bullet)$内恒等态射为

$$\mathrm{id}_{A^\bullet} = (\mathrm{id}_{A^i})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

其中，$\mathrm{id}_{A^i} : A^i \longrightarrow A^i$，$i \in \mathbb{Z}$满足

$$\mathrm{id}_{A^{i+1}} d_i^A = d_i^A = d_i^A \mathrm{id}_{A^i}.$$

2) $\mathcal{A}$的链复形范畴$C(\mathcal{A})$是一个加性范畴.

由于$\mathcal{A}$是Abel范畴，自然是加性范畴，而$\mathcal{A}$中每个态射以$\mathcal{A}$中的态射为分量，从而也满足加性范畴的条件. 容易看出，$\mathcal{A}$中的零对象为

$$O^\bullet = \cdots \to 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \to \cdots.$$

另外

$$A^\bullet \oplus B^\bullet = \cdots \to A^{i-1} \oplus B^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}^A \oplus d_{i-1}^B} A^i \oplus B^i \xrightarrow{d_i^A \oplus d_i^B} A^{i+1} \oplus B^{i+1} \to \cdots.$$

$$A^\bullet \times B^\bullet = \cdots \to A^{i-1} \times B^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}^A \times d_{i-1}^B} A^i \times B^i \xrightarrow{d_i^A \times d_i^B} A^{i+1} \times B^{i+1} \to \cdots.$$

3) $\mathcal{A}$的链复形范畴$C(\mathcal{A})$是一个Abel范畴.

由于$\mathcal{A}$是Abel范畴，因此态射$f_i : A_i \longrightarrow B_i$存在$\ker f_i$与$\mathrm{coker} f_i$且

$$\overline{f}_i : \mathrm{coim} f_i \longrightarrow \mathrm{im} f_i$$

是同构. 从而，态射$f_\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$存在

$$\ker f_\bullet = \cdots \to \ker f_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}^A} \ker f_i \xrightarrow{d_i^A} \ker f_{i+1} \to \cdots.$$

$$\mathrm{coker} f_\bullet = \cdots \to \mathrm{coker} f_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}^B} \mathrm{coker} f_i \xrightarrow{d_i^B} \mathrm{coker} f_{i+1} \to \cdots.$$

且

$$\overline{f}_\bullet = (\overline{f}_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \mathrm{coim} f_\bullet \longrightarrow \mathrm{im} f_\bullet$$

$$(\cdots, \mathrm{coim} f_{i-1}, \mathrm{coim} f_i, \mathrm{coim} f_{i+1}, \cdots) \mapsto (\cdots, \mathrm{im} f_{i-1}, \mathrm{im} f_i, \mathrm{im} f_{i+1}, \cdots)$$

是同构. □

习题 1.18.

设I是R的理想. 证明：若M是自由R-模，则M/IM是自由R/I- 模.

Proof.

$$M/IM \cong R/I \otimes_R M \cong R/I \otimes_R \left(\bigoplus_{i\in A} R\right) \cong \bigoplus_{i\in A} (R/I \otimes_R R) \cong \bigoplus_{i\in A} R/I.$$

□

习题 1.19.

设R为环，Q是R的理想，$M = \bigoplus\limits_{i\in I} Rx_i$为自由模. 证明：$Qx_i$是$Rx_i$的子模且

$$M/QM \cong \bigoplus_{i\in I}(Rx_i/Qx_i) \cong \bigoplus_{i\in I} R/Q$$

是商环R/Q上的自由模，其一组基为

$$\{\overline{x}_i = x_i + QM\}_{i\in I}.$$

Proof. 1)

$$M/QM \cong R/Q \otimes_R M \cong R/Q \otimes_R \left(\bigoplus_{i\in I} R\right) \cong \bigoplus_{i\in I} (R/Q \otimes_R R) \cong \bigoplus_{i\in I} R/Q.$$

2) $\forall x + QM \in M/QM$，存在$x_1, \cdots, x_n \in \{x_i\}_{i\in I}$，$r_1, \cdots, r_n \in R$使得

$$x + QM = \left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) + QM = \sum_{i=1}^n (r_i x_i + QM) = \sum_{i=1}^n (r_i + Q)(x_i + QM).$$

从而，$\{\overline{x}_i = x_i + QM\}_{i\in I}$可表示$R/Q$-模$M/QM$中的元素.

3) $\forall x_1 + QM, \cdots, x_n + QM \in \{\overline{x}_i = x_i + QM\}_{i\in I}$，$x_1, \cdots, x_n \notin QM$. 若

$$\sum_{i=1}^n (r_i + Q)(x_i + QM) = \left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) + QM = 0 + QM.$$

则

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i \in QM \subseteq M$$

不妨设

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i = q_0 m_0.$$

其中，$q_0 \in Q$，$m_0 \in M$. 由于$\{x_i\}_{i\in I}$是R-模M的一组基，存在$y_1, \cdots, y_m \in \{x_i\}_{i\in I}$，$q_1, \cdots, q_m \in R$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = q_0 m_0 = q_0 \sum_{j=1}^{m} q_j y_j.$$

4) 令

$$\{z_1, \cdots, z_s\} = \{x_1, \cdots, x_n\} \cap \{y_1, \cdots, y_m\}.$$

不妨设

$$\{z_1, \cdots, z_s\} = \{x_1, \cdots, x_s\} = \{y_1, \cdots, y_s\}.$$

其中，$s \leq \min\{m, n\}$. 那么

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i - q_0 \sum_{j=1}^{m} q_j y_j = \sum_{l=1}^{s} (r_l - q_0 q_l) z_l + \sum_{i=s+1}^{n} r_i x_i - q_0 \sum_{j=s+1}^{m} q_j y_j = 0.$$

由于

$$\{z_1, \cdots, z_s, x_{s+1}, \cdots, x_n, y_{s+1}, \cdots, y_m\} \subseteq \{x_i\}_{i\in I}.$$

它们线性无关，从而

$$r_l = q_0 q_l \in (q_0) \subseteq Q, \qquad l = 1, \cdots, s.$$

$$r_i = 0, \quad q_0 q_j = 0, \qquad i = s+1, \cdots, n, \quad j = s+1, \cdots, m.$$

故

$$r_1 + Q = \cdots = r_n + Q = 0 + Q.$$

于是

$$\{\overline{x}_i = x_i + QM\}_{i\in I}$$

在R/Q上线性无关，从而构成M/QM的一组基. □

Remark.

$$\{\overline{x}_i = x_i + QM\}_{i\in I}$$

之中可能会有$\overline{0}$. 要把它剔除出去.

习题 1.20.

给定R-模正合列

$$0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

与

$$0 \to K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0.$$

其中P与P'是投射模. 证明：

$$K \oplus P' \cong K' \oplus P.$$

Proof. 1) 考虑正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "\beta i"] & P \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\beta"] \arrow[dr, "\pi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, tail, "i'"] & P' \arrow[r, two heads, "\pi'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由于P是投射模，存在$\beta : P \longrightarrow P'$使得

$$\pi'\beta = \pi.$$

由第二行正合知，$K' \cong \ker \pi'$，而由第一行正合知

$$\pi'\beta i = \pi i = 0.$$

由$\ker \pi'$的泛性质知，存在$\alpha : K \longrightarrow K'$使得

$$\beta i = i'\alpha.$$

2) 考虑序列

$$0 \to K \xrightarrow{\theta} P \oplus K' \xrightarrow{\psi} P' \to 0.$$

其中

$$\theta : x \mapsto \big(i(x), \alpha(x)\big), \qquad \psi : (u, y) \mapsto \beta(u) - i'(y).$$

下面，我们证明，该序列正合.

由于i是单同态，则θ是单同态. $\forall u' \in P'$，由于π是满同态，对于$\pi'(u') \in M$，存在$u \in P$使得

$$\pi(u) = \pi'(u').$$

而$u' - \beta(u) \in \ker \pi' = \mathrm{im} i'$，存在$y \in K'$使得

$$u' - \beta(u) = -i'(y).$$

故$\psi(u, y) = u'$，从而ψ是满同态.

下面只需验证$P \oplus K'$处的正合性.

显然，$\forall x \in K'$

$$\psi\theta(x) = \psi\big(i(x), \alpha(x)\big) = \beta\big(i(x)\big) - i'\big(\alpha(x)\big) = 0.$$

从而，$\mathrm{im}\theta \subseteq \ker \psi$.

$\forall (u, y) \in \ker \psi$

$$\beta(u) = i'(y).$$

于是

$$\pi(u) = \pi'\big(\beta(u)\big) = \pi'\big(i'(y)\big) = 0.$$

故存在$x \in K$使得$u = i(x)$，从而

$$i'(y) = \beta(u) = \beta\big(i(x)\big) = i'\big(\alpha(x)\big).$$

而α为单射，故$y = \alpha(x)$. 从而

$$(u, y) = \theta(x) \in \mathrm{im}\theta.$$

故$\mathrm{im}\theta \supseteq \ker \psi$.

于是，$\mathrm{im}\theta = \ker \psi$. 从而，$P \oplus K'$处正合.

注意到P'是投射模，故该正合列分裂，从而

$$P \oplus K' \cong K \oplus P'.$$

$\square$

Remark. 1) 该命题的对偶命题也成立，即：

给定R-模正合列

$$0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \to 0$$

与

$$0 \to M \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} Q' \to 0.$$

其中E与E'是内射模. 则

$$Q \oplus E' \cong Q' \oplus E.$$

Proof. 考虑正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "i"] & E \arrow[r, two heads, "\pi"] & Q \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[u, equal] \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[ur, "i"] & E' \arrow[u, dashed, "\beta"] \arrow[r, two heads, "\pi'"] \arrow[ur, "\pi\beta"] & Q' \arrow[u, dashed, "\alpha"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由于E是内射模，存在$\beta : E' \longrightarrow E$使得

$$i = \beta i'.$$

由第二行正合知，$Q' \cong \mathrm{coker} i'$. 由第一行正合知

$$\pi\beta i' = \pi i = 0.$$

由coker的泛性质知，存在$\alpha : Q' \longrightarrow Q$使得

$$\alpha\pi' = \pi\beta.$$

考虑序列

$$0 \to E' \xrightarrow{\theta} E \oplus Q' \xrightarrow{\psi} Q \to 0.$$

其中

$$\theta : e' \longmapsto \big(\beta(e'), \pi'(e')\big), \qquad \psi : (u, y) \longmapsto \pi(u) - \alpha(y).$$

下面，我们证明，该序列正合.

若$\big(\beta(e'), \pi'(e')\big) = 0$，则$e' \in \ker \pi' = \mathrm{im} i'$，存在$m \in M$使得

$$i'(m) = e'.$$

此时

$$0 = \beta(e') = \beta i'(m) = i(m).$$

由i是单射知，$m = 0$. 从而，$e' = i'(m) = 0$. 故θ是单射. 于是，E' 处正合.

$\forall q \in Q$，由于π是满射，存在$u \in E$使得

$$\pi(u) = q.$$

于是

$$\psi(u, 0) = \pi(u) - \alpha(0) = q.$$

从而，ψ是满射. 于是，Q处正合.

显然，$\forall e' \in E$

$$\psi\theta(e') = \psi\big(\beta(e'), \pi'(e')\big) = \pi\beta(e') - \alpha\pi'(e) = 0.$$

从而，$\mathrm{im}\theta \subseteq \ker\psi$.

若$(u,y) \in \ker\psi$，则

$$\pi(u) = \alpha y.$$

由π'是满射知，存在$e' \in E'$使得

$$y = \pi'(e').$$

此时

$$\pi(u) = \alpha y = \alpha\pi'(e') = \pi\beta(e').$$

故$u - \beta(e') \in \ker\pi = \mathrm{im}i$. 存在$m \in M$使得

$$u - \beta(e') = i(m) = \beta i'(m).$$

从而

$$u = \beta\big(i'(m) + e'\big), \qquad \pi'\big(i'(m) + e'\big) = \pi'(e') = y.$$

故

$$\theta(i'(m) + e') = \big(\beta(i'(m) + e'), \pi'(i'(m) + e')\big) = (u, y).$$

于是，$(u,y) \in \mathrm{im}\theta$. 即$\mathrm{im}\theta \supseteq \ker\psi$.

综上所示，$\mathrm{im}\theta = \ker\psi$. 从而，$E \oplus Q'$处正合.

注意到，E'是内射模. 从而，上述正合列分裂. 故

$$E \oplus Q' \cong E' \oplus Q.$$

2) 利用正合图表的性质，我们有一个更加漂亮的证明.

考虑正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \oplus P' \arrow[r, tail, "i\oplus\mathrm{id}_{P'}"] & P \oplus P' \arrow[r, two heads, "{(\pi,0)}"] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S \arrow[u, dashed, "\lambda", "\cong"'] \arrow[r, tail, "f"] \arrow[ur, "\theta f"] & P \oplus P' \arrow[u, dashed, "\theta", "\cong"'] \arrow[r, two heads, "{(\pi,\pi')}"] & M \arrow[u, equal, "\mathrm{id}_M", "\cong"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中，$S := \ker(\pi, \pi')$.

由于P是投射模，存在$\tau : P' \longrightarrow P$使得

$$\pi' = \pi\tau.$$

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\pi"] & \\
P' \arrow[ur, dashed, "\tau"] \arrow[r, two heads, "\pi'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

令

$$\theta := \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

容易验证，θ是R-模同态，其逆映射为

$$\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

并且

$$(\pi,0)\theta=(\pi,0)\begin{pmatrix}1&\tau\\0&1\end{pmatrix}=(\pi,\pi\tau)=(\pi,\pi').$$

从而，θ即为我们所需要的同构.

显然

$$(\pi,0)\theta f=(\pi,\pi')f=0.$$

由$\ker(\pi,0)$的泛性质知，存在同态$\lambda:S\longrightarrow K\oplus P'$. 由蛇形引理易知，$\lambda$是同构.

对于正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P\oplus K' \arrow[r, tail, "\mathrm{id}_P\oplus i'"] & P\oplus P' \arrow[r, two heads, "(0,\pi')"] & M \arrow[r] & 0\\
0 \arrow[r] & S \arrow[u, dashed, "\lambda'"', "\cong"] \arrow[r, tail, "f"] \arrow[ur, "\theta' f"] & P\oplus P' \arrow[u, dashed, "\theta'"', "\cong"] \arrow[r, two heads, "(\pi,\pi')"] & M \arrow[u, equal, "\mathrm{id}_M"', "\cong"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中，$S:=\ker(\pi,\pi')$.

由于P'是投射模，存在$\tau':P\longrightarrow P'$使得

$$\pi=\pi'\tau'.$$

$$\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[d, "\pi'"] & \\
P \arrow[ur, dashed, "\tau'"] \arrow[r, two heads, "\pi"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

令

$$\theta':=\begin{pmatrix}1&0\\\tau'&1\end{pmatrix}.$$

容易验证，θ'是R-模同态，其逆映射为

$$\theta'^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-\tau'&1\end{pmatrix}.$$

并且

$$(0,\pi')\theta=(0,\pi')\begin{pmatrix}1&0\\\tau'&1\end{pmatrix}=(\pi'\tau',\pi')=(\pi,\pi').$$

从而，θ'即为我们所需要的同构.

显然

$$(0,\pi')\theta' f=(\pi,\pi')f=0.$$

由$\ker(0,\pi')$的泛性质知，存在同态$\lambda':S\longrightarrow P\oplus K'$. 由蛇形引理易知，$\lambda$是同构.

现在，我们有正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K\oplus P' \arrow[r, tail, "i\oplus\mathrm{id}_{P'}"] & P\oplus P' \arrow[r, two heads, "(\pi,0)"] & M \arrow[r] & 0\\
0 \arrow[r] & S \arrow[u, dashed, "\lambda"', "\cong"] \arrow[d, dashed, "\lambda'"', "\cong"] \arrow[r, tail, "f"] \arrow[ur, "\theta f"] \arrow[dr, "\theta' f"] & P\oplus P' \arrow[u, dashed, "\theta"', "\cong"] \arrow[d, dashed, "\theta'"', "\cong"] \arrow[r, two heads, "(\pi,\pi')"] & M \arrow[u, equal, "\mathrm{id}_M"', "\cong"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_M"', "\cong"] \arrow[r] & 0\\
0 \arrow[r] & P\oplus K' \arrow[r, tail, "\mathrm{id}_P\oplus i'"'] & P\oplus P' \arrow[r, two heads, "(0,\pi')"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

显然，$\lambda\lambda'^{-1}$与$\lambda'\lambda^{-1}$是同构.

考虑正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "{(i,0)}"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_M"', "\cong"] & E\oplus E' \arrow[r, two heads, "\pi\oplus\mathrm{id}_{E'}"] \arrow[d, dashed, "\theta"', "\cong"] \arrow[dr, "g\theta"] & Q\oplus E' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lambda"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "{(i,i')}"] & E\oplus E' \arrow[r, two heads, "g"] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中，$T := \mathrm{coker}(i,i')$.

由于E'是内射模，存在$\tau : E \longrightarrow E'$使得

$$i' = \tau i.$$

$$\begin{tikzcd}
& E' & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[u, "i'"] \arrow[r, tail, "i"] & E \arrow[ul, dashed, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

令

$$\theta := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix}.$$

容易验证，θ是R-模同态，其逆映射为

$$\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau & 1 \end{pmatrix}.$$

并且

$$\theta\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \tau i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i' \end{pmatrix}.$$

从而，θ即为我们所需要的同构.

显然

$$g\theta\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} i \\ i' \end{pmatrix} = 0.$$

由$\mathrm{coker}(i,0)$的泛性质知，存在同态$\lambda : Q\oplus E' \longrightarrow T$. 由蛇形引理易知，$\lambda$是同构.

对于正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "{(0,i')}"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_M"', "\cong"] & E\oplus E' \arrow[r, two heads, "\mathrm{id}_E\oplus\pi'"] \arrow[d, dashed, "\theta'"', "\cong"] \arrow[dr, "g\theta'"] & E\oplus Q' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lambda'"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "{(i,i')}"] & E\oplus E' \arrow[r, two heads, "g"] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中，$T := \mathrm{coker}(i,i')$.

由于E是内射模，存在$\tau' : E' \longrightarrow E$使得

$$i = \tau' i'.$$

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "i"] \arrow[r, tail, "i'"] & E' \arrow[ul, dashed, "\tau'"'] \end{tikzcd}$$

令

$$\theta' := \begin{pmatrix} 1 & \tau' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

容易验证，θ'是R-模同态，其逆映射为

$$\theta'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\tau' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

并且

$$\theta' \begin{pmatrix} 0 \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau' i' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i' \end{pmatrix}.$$

从而，θ'即为我们所需要的同构.

显然

$$g\theta' \begin{pmatrix} 0 \\ i' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} i \\ i' \end{pmatrix} = 0.$$

由coker$(0, i')$的泛性质知，存在同态$\lambda' : E \oplus Q' \longrightarrow T$. 由蛇形引理易知，$\lambda'$是同构.

现在，我们有正合交换图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "{(i,0)}"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_M"', "\cong"] & E \oplus E' \arrow[r, two heads, "\pi \oplus \mathrm{id}_{E'}"] \arrow[d, dashed, "\theta"', "\cong"] \arrow[dr, "g\theta"] & Q \oplus E' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lambda"', "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "{(i,i')}"] & E \oplus E' \arrow[r, "g"] & T \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "{(0,i')}"] \arrow[u, equal, "\mathrm{id}_M", "\cong"'] & E \oplus E' \arrow[r, two heads, "\mathrm{id}_E \oplus \pi'"'] \arrow[u, dashed, "\theta'", "\cong"'] \arrow[ur, "g\theta'"'] & E \oplus Q' \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\lambda'", "\cong"'] & 0 \end{tikzcd}$$

显然，$\lambda'^{-1}\lambda$与$\lambda^{-1}\lambda'$是同构. □

习题 1.22.

1) 证明R-模范畴$\mathcal{R}$-mod中零模是零对象.
2) 证明在集合范畴$\mathcal{S}$ets中，空集$\varnothing$是始对象，单点集是终对象，但它没有零对象.

Proof. 1) $\forall M \in \mathcal{R}$-mod，$\forall f \in \mathrm{Hom}_R(0, M)$. f作为群同态，一定有$f(0) = 0$. 从而$\mathrm{Hom}_R(0, M)$中的元素唯一. 故零模是始对象.

由于零模作为单点集，对任意R-模M，M到零模的同态可视作集合间的映射，而到单点集的映射唯一，从而$\mathrm{Hom}_R(M, 0)$中的元素唯一. 故零模也是终对象

于是，零模是零对象.

2) 由于

$$|\mathrm{Hom}(\varnothing,S)|=|S|^{|\varnothing|}=|S|^0=1,\qquad \forall S\in\mathcal{S}\mathrm{et}.$$

从而，$\mathrm{Hom}(\varnothing,S)$中的元素唯一. 故空集$\varnothing$是始对象，但它不是终对象，因为

$$|\mathrm{Hom}(S,\varnothing)|=|\varnothing|^{|S|}=0^{|S|}=0,\qquad \forall S\neq\varnothing.$$

从而

$$\mathrm{Hom}(S,\varnothing)=\varnothing,\qquad \forall S\neq\varnothing.$$

任意集合到单点集的映射唯一，即

$$|\mathrm{Hom}\big(S,\{e\}\big)|=\big|\{e\}\big|^{|S|}=1^{|S|}=1,\qquad \forall S\in\mathcal{S}\mathrm{et}.$$

从而单点集是终对象. 但它不是始对象，因为

$$|\mathrm{Hom}\big(\{e\},S\big)|=|S|^{|\{e\}|}=|S|^1>1,\qquad \forall|S|>1.$$

若集合范畴$\mathcal{S}\mathrm{ets}$中有零对象S_0，则它是终对象. 从而对任意集合S

$$|\mathrm{Hom}(S,S_0)|=|S_0|^{|S|}=1.$$

这说明$|S_0|=1$是单点集. 但单点集不是始对象. 故集合范畴$\mathcal{S}\mathrm{ets}$中没有零对象. $\square$

习题 1.23.

设R是整环，M是自由R-模. 证明：若$rm=0$，其中$r\in R$而$m\in M$，则$r=0$或$m=0$.

Proof. 设$\varphi:M\longrightarrow\bigoplus\limits_{i\in I}Re_i$为同构，其中$\{e_i\}_{i\in I}$是$M$的一组基. 若$rm=0$，则

$$0=\varphi(rm)=r\varphi(m)=r(r_i)_{i\in I}.$$

由于R是整环，故$r=0$或$(r_i)_{i\in I}=0$，从而$r=0$或$m=\varphi^{-1}\big((r_i)_{i\in I}\big)=0$. $\square$

习题 1.24.

证明：

1) 内射模的直和项还是内射模.
2) 内射模的直积还是内射模.
3) 有限项时，直和与直积等价.

Proof. 1) 设$E=M\oplus N\cong M\times N$，$\eta_1:M\rightarrowtail E$

$$m\mapsto(m,0)$$

为典范嵌入.

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
 & M \arrow[u, tail, "\eta_1"'] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[u, "\varphi_1"'] \arrow[uu, bend left, "\varphi"] \arrow[r, tail, "\tau"] & A \arrow[ul, dashed, "\psi_1"'] \arrow[uul, dashed, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

若$\varphi_1 : B \longrightarrow M$给定，令$\varphi = \eta_1\varphi_1 : B \longrightarrow M$. 由于$E$是内射模，存在$\psi : A \longrightarrow E$使得

$$\varphi = \psi\tau.$$

令$\pi_1 : E \longrightarrow M$

$$(m, n) \mapsto m$$

为典范投射，则$\pi_1\eta_1 = \mathrm{id}_M$，即

$$\pi_1\varphi = \pi_1\eta_1\varphi_1 = \varphi_1.$$

故

$$\pi_1\varphi = \varphi_1.$$

令$\psi_1 = \pi_1\psi$，则

$$\psi_1\tau = \pi_1\psi\tau = \pi_1\varphi = \varphi_1.$$

从而，M是内射模.

同理可知，N也是内射模.

2) 令$E := \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$，$\pi_\lambda : E \twoheadrightarrow E_\lambda$为典范投射.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, two heads, "\pi_\lambda"] & \\
 & E_\lambda & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[u, "\varphi_\lambda"'] \arrow[uu, bend left, "\varphi"] \arrow[r, tail, "\tau"] & A \arrow[uul, dashed, "\psi"'] \arrow[ul, dashed, "\psi_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

若$\varphi : A \longrightarrow E$，$\tau : A \rightarrowtail B$取定，令

$$\varphi_\lambda = \pi_\lambda\varphi : A \longrightarrow E_\lambda.$$

由于E_λ是内射模，存在$\psi_\lambda : A \longrightarrow E_\lambda$ 使得

$$\varphi_\lambda = \psi_\lambda\tau.$$

由于(E, π_λ)是$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的直积，由直积的泛性质知，存在唯一的$\psi : A \longrightarrow E$使得

$$\pi_\lambda\psi = \psi_\lambda.$$

于是

$$\pi_\lambda\psi\tau = \psi_\lambda\tau = \varphi_\lambda.$$

由直积的泛性质知，满足方程

$$\pi_\lambda f = \varphi_\lambda$$

的$f : A \longrightarrow E$是唯一的. 故

$$\psi\tau = \varphi.$$

从而，E是内射模. □

Remark. 1) 任何一个模都是某个内射模的子模，即任何一个模都可嵌入某个内射模(内射包).

2) 无穷多个内射R-模的直和不一定是内射模. 事实上，当且仅当R是Noether环时，该命题才成立.

Proof. $\Longrightarrow$) 若R是Noether环，由Bear判别法知，只需证明：

$$\begin{tikzcd} & E=\bigoplus_{k\in K}E_k & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & R \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

其中，I是R的理想.

$\forall x=(e_k)_{k\in K}\in E$，令
$$\mathrm{Supp}(x):=\{k\in K:e_k\neq 0\}.$$
由直和定义知，$\mathrm{Supp}(x)$是一个有限集.

由于R是Noether环，I是有限生成的. 不妨设
$$I=(a_1,\cdots,a_n).$$
则
$$\mathrm{Supp}\big(f(a_1)\big),\cdots,\mathrm{Supp}\big(f(a_n)\big)$$
都是有限集. 因此，$\forall r\in I$
$$\mathrm{Supp}(r)\subseteq S:=\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{Supp}\big(f(a_i)\big).$$
故
$$\mathrm{im}f\subseteq\bigoplus_{l\in S}E_l.$$
而$\bigoplus\limits_{l\in S}E_l$是内射模，由Bear判别法知，存在$f':I\longrightarrow\bigoplus_{l\in S}E_l$
$$r\longmapsto f(r)$$
从I到R的延拓
$$g':R\longrightarrow\bigoplus_{l\in S}E_l.$$
于是有
$$R\xrightarrow{g'}\bigoplus_{l\in S}E_l\xrightarrow{i}\bigoplus_{k\in K}E_k.$$
故
$$g:=i\circ g':R\longrightarrow\bigoplus_{k\in K}E_k$$
是f的延拓.

$\Longleftarrow$) 我们证明：若R不是Noether环，那么存在R的理想I以及内射R-模E，对于某个$f:I\longrightarrow E$，它不能延拓至R到E 的同态.

由于R不是Noether，存在R中的严格理想升链
$$I_1\subset I_2\subset\cdots\subset I_n\subset\cdots.$$
令$I:=\bigcup\limits_{i=\mathbb{N}}I_i$，则
$$I/I_i\neq\{0\},\qquad\forall i\in\mathbb{N}.$$
由于任意R-模都可以嵌入到某个内射R-模中，不妨设I/I_i嵌入到E_i 中. 那么，$\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}}E_i$ 不可能是内射模.

令$\pi_i : I \longrightarrow I/I_i$为自然投射. $\forall a \in I$，存在$N \in \mathbb{N}$使得$n > N$时，$\pi_n(a) = 0$. 因此，$f : I \longrightarrow \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} I/I_i$

$$a \longmapsto (\pi_i(a))_{i\in\mathbb{N}}$$

满足$\mathrm{im} f \subseteq \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} I/I_i$. 即：$\forall a \in I$，$f(a)$的分量只有有限个不为零.

对于

$$I \xrightarrow{f} \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} I/I_i \xrightarrow{i} \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} E_i.$$

若$\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$内射模，由Bear判别法知，存在$i \circ f$从$I$到$R$的延拓$g : R \longrightarrow \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$. 不妨设

$$g(1) = (e_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

$\forall m \in \mathbb{N}$，存在$a_m \in I$使得

$$a_m \in I, \qquad a_m \notin I_m.$$

于是

$$\pi_m(a_m) \neq 0.$$

但

$$f(a_m) = g(a_m) = a_m g(1) = a_m(e_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_m e_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

故

$$a_m e_m = \pi_m(a_m) \neq 0.$$

从而

$$e_m \neq 0, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

这与$g(1) \in \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$矛盾. □

习题 1.25.

证明：

1) 投射模的直和是投射模.
2) 投射模的直和项是投射模.
3) 有限项时，直和与直积等价.

Proof. 1) 令$P := \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$，$\eta_\lambda : P_\lambda \rightarrowtail P$为典范嵌入.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[ddl, dashed, "\psi"'] \arrow[dd, bend left, "\varphi"] & \\
& P_\lambda \arrow[u, "\eta_\lambda"'] \arrow[d, "\sigma_\lambda"'] \arrow[dl, dashed, "\psi_\lambda"] & \\
A \arrow[r, two heads, "\tau"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

若$\varphi : P \longrightarrow B$，$\tau : A \twoheadrightarrow B$取定，令

$$\sigma_\lambda = \varphi\eta_\lambda : P_\lambda \longrightarrow B.$$

由$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是投射模知，存在$\psi_\lambda : P_\lambda \longrightarrow A$使得

$$\sigma_\lambda = \tau\psi_\lambda.$$

显然，(P,η_λ)是$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的上积. 于是，由上积的泛性质知，存在唯一的$\psi : P \longrightarrow A$使得

$$\psi_\lambda = \psi\eta_\lambda.$$

因此

$$\tau\psi\eta_\lambda = \tau\psi_\lambda = \sigma_\lambda = \varphi\eta_\lambda.$$

而η_λ是典范嵌入，因此，由上积(P,η_λ)的泛性质知，满足方程

$$\sigma_\lambda = f\eta_\lambda$$

的$f : P \longrightarrow B$是唯一的. 故

$$\varphi = \tau\psi.$$

从而，P是投射模.

2) 设$P = M \oplus N$，$\eta_1 : M \rightarrowtail P$，$\eta_2 : M \rightarrowtail P$ 为典范嵌入.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[ddl, dashed, "\psi"'] \arrow[dd, bend left, "\varphi"] & \\
& M \arrow[u, tail, "\eta_1"'] \arrow[d, "\varphi_1"'] \arrow[dl, dashed, "\psi_1"] & \\
A \arrow[r, two heads, "\tau"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
& P \arrow[ddl, dashed, "\psi"'] \arrow[dd, bend left, "\varphi"] & \\
& N \arrow[u, tail, "\eta_2"'] \arrow[d, "\varphi_2"'] \arrow[dl, dashed, "\psi_2"] & \\
A \arrow[r, two heads, "\tau"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

若$\varphi_1 : M \longrightarrow B$，$\varphi_2 : N \longrightarrow B$，$\tau : A \twoheadrightarrow B$取定. 由于$(P,\eta_i)$为$M,N$的上积，存在唯一的$\varphi : P \longrightarrow B$使得

$$\varphi_1 = \varphi\eta_1, \qquad \varphi_2 = \varphi\eta_2.$$

由于P是投射模，存在$\psi : P \longrightarrow A$使得

$$\varphi = \tau\psi.$$

令$\psi_1 = \psi\eta_1 : M \longrightarrow A$，$\psi_2 = \psi\eta_2 : N \longrightarrow A$则

$$\tau\psi_1 = \tau\psi\eta_1 = \varphi\eta_1 = \varphi,$$

$$\tau\psi_2 = \tau\psi\eta_2 = \varphi\eta_2 = \varphi.$$

从而，M,N是投射模. □

Remark. 利用“P是投射模当且仅当P是自由模的直和项”，可以得到一个简单的证明.

Proof. 1) 设$\{P_i\}_{i\in I}$是一族投射模. 对每一个P_i，存在自由模F_i及其子模Q_i使得$F_i = P_i \oplus Q_i$. 于是

$$\bigoplus_{i\in I} F_i = \bigoplus_{i\in I}(P_i \oplus Q_i) = \bigoplus_{i\in I} P_i \oplus \bigoplus_{i\in I} Q_i$$

是自由模. 若X_i是F_i的一组基，则$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$是$\bigoplus\limits_{i\in I} F_i$的一组基. 于是，作为直和项，$\bigoplus\limits_{i\in I} P_i$是投射模.

2) 设P是投射模，则它是某个自由模F的直和项，若P'是投射模P的直和项，则它自然也是自由模F的直和项，从而P'是投射模.

3) 投射模的无穷直积不一定是投射模. 这是因为自由模的无穷直积不一定是自由模. 例如：$\mathbb{Z}$-模$\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_i$ 不是自由$\mathbb{Z}$模，也不是投射$\mathbb{Z}$模(PID $\mathbb{Z}$上的投射模和自由模等价). 这是个著名的例子. 事实上，Baer证明了它没有任何基.

4) 投射但不自由的反例：$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$是自由$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-模.

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

故$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$是投射$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-模，但它们不自由.

5) 任何一个模都是某个自由模的商模，即某个自由模的同态象. 任何一个模都是某个投射模的商模，即某个投射模的同态象. □

习题 1.26.

设R是整环. 证明：

1) 若R在$\mathcal{R}$-mod范畴中是内射模，则R是域.
2) 若R不是域，则$\mathcal{R}$-mod范畴中既是投射模又是内射模的只能是零模.

Proof. 1) R是整环，若R是内射R-模，则由引理1.104知，R是可除模. 对$1 \in R$，$\forall r \in R$，存在$r' \in R$使得

$$1 = rr'.$$

因此，R中元素都可逆，从而是一个域.

2) 若不然，则存在$M \neq \{0\}$使得M既是投射模又是内射模. 此时，我们将得到矛盾：R是一个域.

根据Joseph J. Rotman ***An Introduction to Homological Algebra*** Exercise 3.18的Hints，证明分为以下几步.

• $\mathrm{Hom}_R(M, R) \neq \{0\}$.

由于$M \neq \{0\}$，取$0 \neq x \in M$. 由命题1.93知，对于投射模M，存在$\{m_i \in M\}_{i \in I}$与$\{\varphi_i \in \mathrm{Hom}_R(M, R)\}_{i \in I}$使得

$$x = \sum_{i \in I} \varphi_i(x) m_i.$$

于是，必有某个$\varphi_i \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$使得$\varphi_i(x) \neq 0$.

• $\forall 0 \neq f \in \mathrm{Hom}(M, R)$，存在$0 \neq m \in M$，使得$f(m) = 1$.

由于$f \neq 0$，存在$0 \neq m' \in M$，$0 \neq r \in R$，使得

$$f(m') = r.$$

由于M是可除模，存在m使得

$$m' = rm.$$

此时

$$r = f(m') = f(rm) = rf(m).$$

而R是整环，有消去律. 故

$$f(m) = 1.$$

• R是一个域.

$\forall 0 \neq r \in R$，存在$\widetilde{m}$使得

$$1 = f(m) = f(r\widetilde{m}) = rf(\widetilde{m}).$$

于是

$$r^{-1} = f(\widetilde{m}).$$

故R是一个域. $\square$

Remark. 1) $\mathrm{Hom}_R(M, R) \neq \{0\}$的另一种证明.

由于M是投射模，存在N使得$M \oplus N$是自由模. 于是

$$M \oplus N \cong \bigoplus_{i \in I} R_i.$$

考虑典范嵌入

$$i : M \oplus N \longrightarrow \prod_{i \in I} R_i.$$

那么正合列

$$0 \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow \prod_{i \in I} R_i$$

诱导下列正合

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(M, M \oplus N\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\Big(M, \prod_{i \in I} R_i\Big).$$

但

$$\mathrm{Hom}_R\Big(M, \prod_{i \in I} R_i\Big) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(M, R_i).$$

故

$$\mathrm{Hom}_R\big(M, M \oplus N\big) \neq \{0\} \Longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, R) \neq \{0\}.$$

2) 平坦但不投射的例子.

$\mathbb{Q}$是可除$\mathbb{Z}$-模，而PID上的可除模是内射模. 由于$\mathbb{Z}$是整环不是域，因此$\mathbb{Q}$不是投射$\mathbb{Z}$-模，自然也不是自由$\mathbb{Z}$-模. 但$\mathbb{Q}$是无扭$\mathbb{Z}$-模，PID 上的无扭模是平坦模，故$\mathbb{Q}$是平坦$\mathbb{Z}$-模.

习题 1.27.

证明R-模E是内射模当且仅当对R的任意理想I，正合列

$$0 \to E \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} R/I \to 0$$

分裂.

Proof. $\Longrightarrow$) 若E是内射模，则正合列

$$\begin{tikzcd}
 & E & & & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "i"] & B \arrow[ul, "q"'] \arrow[r, "p"] & R/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

分裂.

$\Longleftarrow$) 考虑正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & R \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, dashed, "\gamma'"] & R/I \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, tail, dashed, "\alpha'"] & B \arrow[r, two heads, dashed, "\beta'"] & R/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

若$\gamma : I \longrightarrow E$给定，令$(B;\alpha',\gamma')$为$\alpha$与$\gamma$的推出，即

$$B = (E+R)/S, \qquad \alpha' : e \mapsto (e,0)+S, \qquad \gamma' : r \mapsto (0,r)+S.$$

其中

$$S := \{(\gamma a, -\alpha a) : a \in I\}.$$

令

$$\beta' : (e,r)+S \mapsto \beta(r).$$

1) β'的定义是合理的.

若$(e_1,r_1)+S = (e_2,r_2)+S$，则

$$(e_1-e_2, r_1-r_2) = (e_1,r_1)-(e_2,r_2) \in S.$$

因此，存在$a \in I$使得

$$\gamma(a) = e_1 - e_2, \qquad \alpha(a) = r_2 - r_1.$$

此时

$$\beta'\big((e_2,r_2)+S\big) - \beta'\big((e_1,r_1)+S\big) = \beta(r_2)-\beta(r_1) = \beta(r_2-r_1) = \beta\big(\alpha(a)\big) = 0.$$

2) 上述定义的B，α',β',γ'使得第二行正合.

若$\alpha'(e) = (e,0)+S = 0$，则$(e,0)\in S$，于是存在$a \in I$使得

$$\gamma(a) = e, \qquad -\alpha(a) = 0.$$

而α是单射，从而$a=0$，故$e=\gamma(a)=0$. 于是，α'是单射. 从而E处正合.

注意到，$\beta'\gamma' = \beta$是满射，故β'是满射. 从而R/I处正合.

显然

$$\beta'\alpha'(e) = \beta'(e,0) = \beta(0) = 0.$$

故$\mathrm{im}\alpha' \subseteq \ker\beta'$.

若$(e,r)+S \in \ker\beta'$，则$r \in \ker\beta = \mathrm{im}\alpha$. 从而，存在$a\in I$使得$\alpha(a)=r$. 此时

$$(e,r)+S = \big(e,\alpha(a)\big)+S = \big(e+\gamma(a),0\big)+S = \alpha'\big(e+\gamma(a)\big) \in \mathrm{im}\alpha'.$$

故$\mathrm{im}\alpha' \supseteq \ker\beta'$.

于是，$\mathrm{im}\alpha' = \ker\beta'$. 从而，$B$处正合.

3) γ可由I延拓至R，从而由Baer判别法知，E是内射模.

由题设知，第二行正合列分裂，从而存在$\pi' : B \longrightarrow E$使得

$$\pi'\alpha' = \mathrm{id}_E.$$

令$f := \pi'\gamma'$，则

$$f|_I = \pi'\gamma'\alpha = \pi'\alpha'\gamma = \gamma.$$

从而，f是γ由I到R的延拓. $\square$

Remark. 事实上，对于一般的push-out M，依然有上述正合交换图表. 即：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & R/I \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\eta"] & M \arrow[r, dashed, "\xi"] \arrow[dr, "\xi'"] & R/I \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & 0 \\
 & & & X &
\end{tikzcd}$$

Proof. 由于

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "f"] & R \arrow[d, "g"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi"] & \\
E \arrow[r, "\eta"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & M \arrow[dr, dashed, "\xi"] & \\
 & & R/I
\end{tikzcd}$$

因此，由π是满射且$\xi g=\pi$知，ξ是满射.

只需说明，$(R/I,\xi)$是η的cokernel.

若$\xi':M\longrightarrow X$满足

$$\xi'\eta=0.$$

由

$$(\xi' g)i=(\xi'\eta)f=0$$

以及$(R/I,\pi)$是i的cokernel知，存在唯一的$\varphi:R/I\longrightarrow X$使得

$$\varphi\pi=\xi' g.$$

现在

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "f"] & R \arrow[d, "g"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi\pi"] & \\
E \arrow[r, "\eta"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & M \arrow[dr, dashed, "\xi'", "\varphi\xi"'] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

由push-out的泛性质知

$$\varphi\xi=\xi'.$$

因此，$(R/I,\xi)$是η的cokernel. 从而，第二行正合. $\square$

习题 1.28.

设$a\in R$不是零除子，即不存在$b\in R$，$b\neq 0$，使得$ab=0$. 证明：对任意平坦R-模F，不存在非零元$x\in F$，使得$ax=0$.

Proof. 令$\varphi: R \longrightarrow R$，$r \mapsto ar$. 由于$a$不是零除子，故

$$ar = 0 \Longleftrightarrow r = 0.$$

从而φ是单射. 由于F平坦，因此

$$F \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}_F \otimes \varphi} F \otimes R$$

是单射. 由于

$$\mathrm{id}_F \otimes \varphi(x \otimes 1) = x \otimes a = ax \otimes 1, \qquad \forall x \in F.$$

从而

$$x \mapsto ax$$

是单射. 故

$$ax = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

□

Remark. 1) 习题1.23中的自由模条件可以改为无扭模、平坦模、投射模(投射模是平坦模)等.

2) M是可除R模$\Longleftrightarrow rM = M$，$0 \neq r \in R$.

习题 1.29.

设R是整环，Q是R的商域. 证明：

$$Q/R \otimes Q/R = 0.$$

Proof. $\forall a, b, c, d \in R$，$b, d \neq 1$

$$\left(\frac{a}{b} + R\right) \otimes \left(\frac{c}{d} + R\right) = d\left(\frac{a}{bd} + R\right) \otimes \left(\frac{c}{d} + R\right) = \left(\frac{a}{bd} + R\right) \otimes d\left(\frac{c}{d} + R\right) = \left(\frac{a}{bd} + R\right) \otimes 0 = 0.$$

□

习题 1.30.

设$(m, n) = 1$. 证明：$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$. 对于一般的$m, n$，有何结论?

Proof. 由命题1.118知

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \frac{\mathbb{Z}/(n)}{(m)\big(\mathbb{Z}/(n)\big)} \cong \frac{\mathbb{Z}/(n)}{(m)/\big((m) \cap (n)\big)} \cong \frac{\mathbb{Z}/(n)}{\big((m) + (n)\big)/(n)} \cong \mathbb{Z}/\big((m) + (n)\big) \cong \mathbb{Z}/\big(\gcd(m, n)\big).$$

□

习题 1.31.

设M, N是平坦R-模. 证明：$M \otimes_R N$也是平坦R-模.

Proof. 由于M, N平坦，故$M \otimes_R \bullet, N \otimes_R \bullet$是正合函子. 由结合律知

$$\big(M \otimes_R N\big) \otimes_R \bullet = M \otimes_R \big(N \otimes_R \bullet\big)$$

也是正合函子. 从而，$M \otimes_R N$是平坦R-模. □

Remark. 1) 一般情况下，张量积函子不是左正合的. 反例如下：

考虑$\mathbb{Z}$-模$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，对于正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

函子$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \bullet$不是左正合的. 事实上

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}.$$

2) 自由R-模的张量积是自由R-模.

Proof. 设F_1, F_2是自由R-模，则

$$F_1 \otimes_R F_2 \cong \Big(\bigoplus_{i\in I} R_i\Big) \otimes_R \Big(\bigoplus_{j\in J} R_j\Big) \cong \bigoplus_{i\in I}\Bigg(R_i \otimes_R \Big(\bigoplus_{j\in J} R_j\Big)\Bigg) \cong \bigoplus_{i\in I, j\in J} R_{ij}.$$

□

由上述证明可以看出

$$\mathrm{rank}(F_1 \otimes_R F_2) = \mathrm{rank}(F_1)\mathrm{rank}(F_2).$$

特别地，若R是域，则F_1, F_2是R-线性空间，从而

$$\dim(F_1 \otimes_R F_2) = \dim(F_1)\dim(F_2).$$

3) 投射R-模的张量积是投射R-模.

Proof. 设P_1, P_2是投射R-模，则存在Q_1, Q_2使得

$$F_1 := P_1 \oplus Q_1, \qquad F_2 := P_2 \oplus Q_2$$

是自由R-模. 于是

$$F_1 \otimes_R F_2 = (P_1 \otimes_R P_2) \oplus (P_1 \otimes_R Q_2) \oplus (Q_1 \otimes_R P_2) \oplus (Q_1 \otimes_R Q_2)$$

是自由R-模. 因此，作为自由R-模的直和项，$P_1 \otimes_R P_2$是投射R-模. □

4) 张量积不保持直积的反例.

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_{n\geq 2} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ncong \prod_{n\geq 2} \big(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big).$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$中元素的阶都有限，故$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$，从而等式右端为零. 但$\prod\limits_{n\geq 2} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$中有阶为零的元素，从而等式左端不为零.

5) 设M是平坦R-模，N是M的子模. 那么

$$M/N\text{平坦} \Longleftrightarrow N \cap IM = IN, \qquad \forall I \subseteq R.$$

习题 1.32.

设$f: R \longrightarrow S$为交换环间的同态，M是R-模，N是S- 模，故N存在自然的R-模结构，记为N_R.
证明：存在典范Abel群同构

$$\mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R M, N\big) \cong \mathrm{Hom}_R\big(M, N_R\big).$$

Proof. 1) $\forall \psi \in \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R M, N\big)$，令$\varphi_\psi : M \longrightarrow N_R$

$$m \longmapsto \psi(1 \otimes_R m).$$

$\forall r_1, r_2 \in R$，$\forall m_1, m_2 \in M$

$$\begin{aligned}\varphi_\psi(r_1 m_1 + r_2 m_2) =&\psi\big(1 \otimes_R (r_1 m_1 + r_2 m_2)\big)\\ =&\psi(1 \otimes_R r_1 m_1 + 1 \otimes_R r_2 m_2)\\ =&\psi\big(f(r_1) \otimes_R m_1 + f(r_2) \otimes_R m_2\big)\\ =&f(r_1)\psi(1 \otimes_R m_1) + f(r_2)\psi(1 \otimes_R m_2)\\ =&f(r_1)\varphi_\psi(m_1) + f(r_2)\varphi_\psi(m_2).\end{aligned}$$

于是，$\varphi_\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, N_R)$.

令$F : \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R M, N\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(M, N_R\big)$

$$\psi \longmapsto \varphi_\psi.$$

若$\varphi_\psi \equiv 0$，则$\forall s \in S$

$$\psi(s \otimes_R m) = s\psi(1 \otimes_R m) = s\varphi_\psi(m) = 0, \qquad \forall m \in M.$$

于是，$\psi \equiv 0$. 从而，F是单射.

$\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R M, N\big)$，$\forall 1 \otimes_R m \in S \otimes_R M$

$$(\psi_1 + \psi_2)(1 \otimes_R m) = \psi_1(1 \otimes_R m) + \psi_2(1 \otimes_R m) = \varphi_{\psi_1}(m) + \varphi_{\psi_2}(m) = (\varphi_{\psi_1} + \varphi_{\psi_2})(m)$$

于是

$$F(\psi_1 + \psi_2) = \varphi_{\psi_1} + \varphi_{\psi_2} = F(\psi_1) + F(\psi_2).$$

故$F : \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R M, N\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(M, N_R\big)$是Abel群单同态.

2) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R\big(M, N_R\big)$，由张量积的泛性质，存在唯一的$\psi_\varphi \in \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R M, N\big)$ 使得下图交换. 即：

$$\begin{tikzcd} S \times M \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\theta_\varphi"'] & & S \otimes_R M \arrow[dl, dashed, "\psi_\varphi"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

其中

$$\pi : (s, m) \longmapsto s \otimes_R m, \qquad \theta_\varphi : (s, m) \longmapsto s\varphi(m).$$

都是R-双线性映射.

令$F' : \mathrm{Hom}_R\big(M, N_R\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R M, N\big)$

$$\varphi \longmapsto \psi_\varphi.$$

显然

$$\psi_\varphi(s \otimes_R m) = \psi_\varphi \pi(s, m) = \theta_\varphi(s, m) = s\varphi(m).$$

于是

$$\psi_\varphi(1 \otimes_R m) = \varphi(m).$$

3) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R\big(M, N_R\big)$，$\forall m \in M$

$$FF'\varphi(m) = F\psi_\varphi(m) = \psi_\varphi(1 \otimes_R m) = \varphi(m).$$

故

$$FF' = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(M,N_R)}.$$

从而，$F : \mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R M, N\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(M, N_R\big)$还是Abel群满同态.

综上所述，我们有Abel群同构

$$\mathrm{Hom}_S\big(S \otimes_R M, N\big) \cong \mathrm{Hom}_R\big(M, N_R\big).$$

$\square$

Remark. 1) 这是函子$\bigotimes$与函子Hom组成伴随对的特例.

2) 设R, R'是环，M是R-模，P是R'-模，N是(R, R')-双模. 那么，存在典范(R, R')-同构

$$M \otimes_R (N \otimes_{R'} P) \cong (M \otimes_R N) \otimes_{R'} P,$$

$$\mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R N, P) \cong \mathrm{Hom}_R\big(M, \mathrm{Hom}_{R'}(N, P)\big).$$

3) 设R是环，R'是R-代数. 若M是R-模，P是R'-模，则存在典范R'-同构

$$(M \otimes_R R') \otimes_{R'} P \cong M \otimes_R P,$$

$$\mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', P) = \mathrm{Hom}_R(M, P).$$

若M是R'-模，P是R-模，则存在典范R'-同构

$$\mathrm{Hom}_R(M, P) = \mathrm{Hom}_{R'}\big(M, \mathrm{Hom}_R(M, P)\big).$$

总而言之，$\bullet \otimes_R R'$是R'的数乘限制在R上的左伴随函子，而$\mathrm{Hom}_R(R', \bullet)$是$R'$的数乘限制在$R$上的右伴随函子.

上述第一个同构由(2)与命题1.113得到. 其余同构由(2)与习题1.3和命题1.113 得到.

习题 1.33.

设k是域，$f(x)$是k上的不可约多项式，α是$f(x)$的一个根. 证明：对于k的域扩张k'，我们有

$$k(\alpha) \otimes_k k' \cong k'[x]/\big(f(x)\big).$$

Proof. 1) 若α在$k[x]$上的极小多项式为$f_0(x)$，则$f(x) = cf_0(x)$，$c \in k$.

做带余除法

$$f(x) = q(x)f_0(x) + r(x), \qquad \deg\big(r(x)\big) < \deg\big(f_0(x)\big).$$

由$f(\alpha) = f_0(\alpha)$知，$r(\alpha) = 0$. 若$r(x) \neq 0$，则与$f_0(x)$ 的极小性矛盾. 从而，$f_0(x) \mid f(x)$. 但

$$\deg\big(f_0(x)\big) \geq 1.$$

它在$k[x]$中不可逆，而$f(x)$不可约，故$q(x)$可逆，从而是常数. 于是

$$f(x) = cf_0(x), \qquad c \in k.$$

2) $k(\alpha) \cong k[x]/\big(f(x)\big)$.

令$\varphi : k[x] \longrightarrow k(\alpha)$

$$\varphi : f(x) \mapsto f(\alpha).$$

则φ是环同态. 显然，$\big(f(x)\big) \subseteq \ker\varphi$. $\forall g(x) \in \ker\varphi$，则$\alpha$是$g(x)$的根. 由带余除法

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \qquad \deg\big(r(x)\big) < \deg\big(f(x)\big).$$

由$f(\alpha) = g(\alpha)$知，$r(\alpha) = 0$. 若$r(x) \neq 0$，则与$f(x) = cf_0(x)$的极小性矛盾. 从而，$f(x) \mid g(x)$. 于是

$$g(x) \in \big(f(x)\big) \Longrightarrow \ker\varphi = \big(f(x)\big).$$

故

$$k(\alpha) \cong k[x]/\big(f(x)\big).$$

3) $k[x] \otimes_k k' \cong k'[x]$.

显然，$\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$k[x], k'[x]$的一组基，从而$k[x], k'[x]$是自由模. 于是

$$k[x] \otimes_k k' \cong \Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} k\Big) \otimes_k k' \cong \Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} k \otimes_k k'\Big) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} k' \cong k'[x].$$

4) 由基变换公式，推论1.131知

$$\begin{aligned} k(\alpha) \otimes_k k' \cong & k[x]/\big(f(x)\big) \otimes_k k' \\ \cong & k[x]/\big(f(x)\big) \otimes_{k[x]} \big(k[x] \otimes_k k'\big) \\ \cong & k[x]/\big(f(x)\big) \otimes_{k[x]} k'[x] \\ \cong & k'[x]/k'[x]\big(f(x)\big)_k \\ \cong & k'[x]/\big(f(x)\big)_{k'}. \end{aligned}$$

其中，$\big(f(x)\big)_k$表示$f(x)$在$k[x]$中生成的理想，$\big(f(x)\big)_{k'}$表示$f(x)$在$k'[x]$中生成的理想. □

Remark. 此题目也可以通过构造张量积映射进行证明. 类似于习题1.32.

习题 1.34.

设R是PID. 证明：$M \mapsto M_{\mathrm{tor}}$是$R$-模范畴上的左正合函子.

Proof. 设

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0.$$

正合，则$\ker g = \mathrm{im} f$. 对于

$$0 \to M'_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{f'} M_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{g'} M''_{\mathrm{tor}}.$$

其中

$$f' := f|_{M'_{\mathrm{tor}}}, \qquad g' := g|_{M_{\mathrm{tor}}}.$$

因此，M'_{tor}处的正合是显然的.

容易看出

$$\ker g' = \ker g \cap M_{\mathrm{tor}}.$$

下面说明

$$\mathrm{im} f' = \mathrm{im} f \cap M_{\mathrm{tor}}.$$

从而，$\ker g' = \mathrm{im} f'$. 由此可得M_{tor}处正合.

$\forall m' \in M'_{\mathrm{tor}}$，存在$r \in R$，$r \neq 0$使得$rm' = 0$. 此时

$$rf'(m') = rf(m') = f(rm') = f(0) = 0.$$

从而$f'(m') = f(m') \in \mathrm{im} f \cap M_{\mathrm{tor}}$. 故$\mathrm{im} f' \subseteq \mathrm{im} f \cap M_{\mathrm{tor}}$.

$\forall m \in \mathrm{im} f \cap M_{\mathrm{tor}}$，存在$m' \in M'$，$r \in R$，$r \neq 0$使得

$$0 = rm = rf(m') = f(rm').$$

由f是单射知，$rm' = 0$. 从而，$m' \in M'_{\mathrm{tor}}$且

$$m = f(m') = f'(m') \in \mathrm{im} f'.$$

故$\mathrm{im} f' \supseteq \mathrm{im} f \cap M_{\mathrm{tor}}$. □

Remark. 函子$M \longmapsto M_{\mathrm{tor}}$不是右正合的反例：

$$0 \longrightarrow 6\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Z}/6\mathrm{Z} \longrightarrow 0.$$

其中，$\mathbb{Z}$无扭，而$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$不是无扭的. 因此，该函子不是右正合的.

题目中的条件PID可以改为整环. 整环是为了保证M_{tor}是M的子模.

反例：$R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$，$M = R$，则$[3], [4] \in M_{\mathrm{tor}}$，但$[3] + [4] = [1] \notin M_{\mathrm{tor}}$.

若M'是可除模，或者M', M中有一个是扭模，则有正合列

$$0 \to M'_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{f'} M_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{g'} M''_{\mathrm{tor}} \to 0.$$

Proof. 只需证明g'是满射.

1) M'是可除模.

$\forall m'' \in M''_{\mathrm{tor}} \subseteq M''$，由于$g$是满射，存在$m \in M$，$r \in R$，$r \neq 0$使得

$$g(m) = m'', \qquad rm'' = 0.$$

从而$rm \in \ker g = \mathrm{im} f$，存在$m' \in M'$使得

$$f(m') = rm.$$

由于M'是可除模，存在$\widetilde{m}'$使得

$$r\widetilde{m}' = m'.$$

故

$$r\big(m - f(\widetilde{m}')\big) = 0.$$

从而，$m - f(\widetilde{m}') \in M_{\mathrm{tor}}$且

$$m'' = g(m) = g\big(m - f(\widetilde{m}')\big) = g'\big(m - f(\widetilde{m}')\big) \in \mathrm{im} g'.$$

2) $M' = M'_{\mathrm{tor}}$.

由正合列知，$M/\mathrm{im} f \cong M''$. 从而

$$\big(M/\mathrm{im} f\big)_{\mathrm{tor}} \cong M''_{\mathrm{tor}}.$$

$\forall m'' \in M''_{\text{tor}}$，存在$m + \text{im}f \in \left(M/\text{im}f\right)_{\text{tor}}$使得

$$g : m + \text{im}f \mapsto m''.$$

存在$r \in R$，$r \neq 0$使得

$$r(m + \text{im}f) = rm + \text{im}f = 0 + \text{im}f.$$

而$\text{im}f = f(M') = f(M'_{\text{tor}})$是扭模，从而存在$r' \in R$，$r' \neq 0$使得

$$r'(rm) = (r'r)m = 0.$$

于是，$m \in M_{\text{tor}}$且$m'' = g(m) = g'(m) \in \text{im}g'$.

3) $M = M_{\text{tor}}$.

此时

$$M''_{\text{tor}} \subseteq M'' = g(M) = g(M_{\text{tor}}) = g'(M_{\text{tor}}) \subseteq M''_{\text{tor}}.$$

故

$$M''_{\text{tor}} = g'(M_{\text{tor}}).$$

□

习题 1.35.

证明：若R-模M的所有有限生成子模均是平坦模，则M也是平坦模.

Proof. 对于正合列

$$0 \to N' \xrightarrow{i} N,$$

要证

$$0 \to M \otimes_R N' \xrightarrow{\text{id}_M \otimes_R i} M \otimes_R N$$

正合. 从而，M平坦.

设F是由$M \times N$生成的自由模，则存在F的子模S使得

$$F/S \cong M \otimes_R N.$$

其中，S由以下形式的元素生成：

$$m_j \otimes_R (n_j + \widetilde{n}_j) - m_j \otimes_R n_j - m_j \otimes_R \widetilde{n}_j,$$

$$(m_s + \widetilde{m}_s) \otimes_R n_s - m_s \otimes_R n_s - \widetilde{m}_s \otimes_R n_s,$$

$$(r_t m_t) \otimes_R n_t - m_t \otimes_R (r_t n_t).$$

若$\alpha \in \ker(\text{id}_M \otimes_R i)$，则

$$(\text{id}_M \otimes_R i)(\alpha) = 0 + S \in S.$$

令

$$\alpha = \sum_{i=1}^{K} m_i \otimes_R n'_i.$$

那么

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_M \otimes_R i)(\alpha) = 0 + S = &\sum_{j\in J} c_j[m_j \otimes_R (n_j + \widetilde{n}_j) - m_j \otimes_R n_j - m_j \otimes_R \widetilde{n}_j] \\ &+ \sum_{s\in S} c_s[(m_s + \widetilde{m}_s) \otimes_R n_s - m_s \otimes_R n_s - \widetilde{m}_s \otimes_R n_s] \\ &+ \sum_{t\in T} c_t[(r_t m_t) \otimes_R n_t - m_t \otimes_R (r_t n_t)].\end{aligned}$$

其中，J, K, S, T均为有限集，$m_i, m_j, m_s, \widetilde{m}_s, m_t \in M$，$n_i' \in N'$，$n_j, \widetilde{n}_j, n_s, n_t \in N$，$c_j, c_s, c_t, r_t \in R$.

令$M' = \langle m_i, m_j, m_s, \widetilde{m}_s, m_t \rangle$，则$M'$是$M$的有限生成子模. 显然

$$\alpha \in \ker(\mathrm{id}_M' \otimes_R i) \subseteq M' \otimes_R N', \qquad (\mathrm{id}_M' \otimes_R i)(\alpha) \in M' \otimes_R N.$$

但M'作为M的有限生成子模平坦，从而

$$M' \otimes_R N' \xrightarrow{(\mathrm{id}_M' \otimes_R i)} M' \otimes_R N$$

是单射. 故$\alpha = 0$，从而$\ker(\mathrm{id}_M \otimes_R i) = \{0\}$. 于是，$\mathrm{id}_M \otimes_R i$是单射. $\square$

Remark. M的所有有限生成子模$\{M_i\}_{i\in I}$在包含关系下构成一个拟有序集，从而可视为一个正向系统. 并且

$$\varinjlim M_i = M.$$

由于M的所有有限生成子模都平坦. 因此，对于任意R-模正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

都有

$$0 \longrightarrow M_i \otimes_R A \longrightarrow M_i \otimes_R B \longrightarrow M_i \otimes_R C \longrightarrow 0, \qquad \forall i \in I.$$

于是，由正向极限的保平坦性

$$0 \longrightarrow \varinjlim(M_i \otimes_R A) \longrightarrow \varinjlim(M_i \otimes_R B) \longrightarrow \varinjlim(M_i \otimes_R C) \longrightarrow 0.$$

由张量积的保正向极限性

$$0 \longrightarrow (\varinjlim M_i) \otimes_R A \longrightarrow (\varinjlim M_i) \otimes_R B \longrightarrow (\varinjlim M_i) \otimes_R C \longrightarrow 0.$$

故

$$0 \longrightarrow M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R B \longrightarrow M \otimes_R C \longrightarrow 0.$$

从而，M平坦.

习题 1.36.

设$G=\prod\limits_{p\in P}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$为所有素域$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\mathbb{F}_p$的直积. 其中，$P$为素数集. 证明：

1)
$$G_{\text{tor}}=\bigoplus_{p\in P}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

2) G/G_{tor}是可除群.

3)
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},G)=0,\qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},G/G_{\text{tor}})\neq 0.$$

从而，G/G_{tor}不是G的直和项.

以上Abel群均视为$\mathbb{Z}$模.

Proof. 1) $G_{\text{tor}}\supseteq\bigoplus\limits_{p\in P}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$\forall x\in\bigoplus\limits_{p\in P}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，$x$可表示为

$$x=\sum_{i=1}^{n}(z_n+p_n\mathbb{Z}),\qquad z_i\in\mathbb{Z},\quad p_i\in P.$$

取$r=p_1\cdots p_n\in\mathbb{Z}$，则$rx=0$. 从而，$x\in G_{\text{tor}}$.

$G_{\text{tor}}\subseteq\bigoplus\limits_{p\in P}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$\forall x\in G$，则x可表示为

$$x=(z_1+p_1\mathbb{Z},\cdots,z_n+p_n\mathbb{Z},\cdots),\qquad z_i\in\mathbb{Z},\quad p_i\in P,\qquad i\in\mathbb{N}.$$

若$x\in G_{\text{tor}}$，则存在$r\in\mathbb{Z}$使得$rx=0$，于是

$$rz_i\in p_i\mathbb{Z},\qquad i\in\mathbb{N}.$$

由于$p_i\mid rz_i$，$p_i\in P$，故

$$p_i\nmid z_i\Longrightarrow p_i\mid r.$$

但r是一个有限正整数，其素因子只有有限个. 从而，只有有限个$i\in\mathbb{N}$ 使得$p_i\nmid z_i$. 即：满足

$$z_i+p_i\mathbb{Z}\neq\overline{0}$$

的$i\in\mathbb{N}$有限. 故

$$x\in\bigoplus_{p\in P}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

2) $\forall\overline{x}\in G/G_{\text{tor}}$，则$\overline{x}$可表示为

$$\overline{x}=x+G_{\text{tor}}=(z_1+p_1\mathbb{Z},\cdots,z_n+p_n\mathbb{Z},\cdots)+G_{\text{tor}}.$$

$\forall r\in\mathbb{Z}$，由于$p_i\in P$，故$\gcd(r,p_i)$为1或p_i. 而r的素因子只有有限个，从而，使得

$$\gcd(r,p_i)\neq 1$$

的$i\in\mathbb{N}$只有有限个.

若$\gcd(r,p_i)=1$，则存在$s_i,t_i\in\mathbb{Z}$使得

$$s_ir+t_ip_i=1.$$

从而

$$z_i-r(s_iz_i)=p_i(t_iz_i)\in p_i\mathbb{Z}.$$

于是

$$r(s_iz_i+p_i\mathbb{Z})=z_i+p_i\mathbb{Z}.$$

令

$$f_r(i)=\begin{cases} s_iz_i+p_i\mathbb{Z}, & \gcd(r,p_i)=1,\\ 0+p_i\mathbb{Z}, & \gcd(r,p_i)\neq 1.\end{cases}$$

则

$$r(f_r(1),\cdots,f_r(n),\cdots)-x\in G_{\text{tor}}=\bigoplus_{p\in P}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

这是因为，两者的差中，不为零的分量是由$\gcd(r,p_i)\neq 1$产生的，而这样的i只有有限个.

令

$$x'=(f_r(1),\cdots,f_r(n),\cdots)\in G.$$

则

$$r\overline{x'}=\overline{x}.$$

故G/G_{tor}是可除群.

3) $\forall f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},G)$，若$f\neq 0$，则存在$0\neq r\in\mathbb{Q}$使得

$$f(r)=x\neq 0.$$

从而，存在某个$i\in\mathbb{N}$使得x的第i个分量

$$z_i+p_i\mathbb{Z}\neq 0+p_i\mathbb{Z}.$$

考虑$\dfrac{r}{p_i}\in\mathbb{Q}$，则

$$p_if\left(\frac{r}{p_i}\right)=f(r)=x.$$

$\forall y\in G$，p_iy的第i个分量都是零，从而

$$p_iy\neq x.$$

这就产生了矛盾. 故$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},G)=\{0\}$.

由于G/G_{tor}是PID$\mathbb{Z}$上的可除模，从而是内射模. 因此，正合列

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\longrightarrow 0.$$

诱导下列正合

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},G/G_{\text{tor}})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},G/G_{\text{tor}})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},G/G_{\text{tor}})\longrightarrow 0.$$

由习题1.3

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},G/G_{\text{tor}})\cong G/G_{\text{tor}}\neq\{0\}.$$

故

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},G/G_{\text{tor}})\neq\{0\}$$

综上所述，G/G_{tor}不可能是G的之和项.

否则，取$i:G/G_{tor}\longrightarrow G$为典范嵌入. 此时，$\forall 0\neq f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},G/G_{\mathrm{tor}})$

$$0\neq if\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},G).$$

这就产生了矛盾. □

Remark. 这个例子说明了，即使$\mathbb{Z}$是PID，但G不是有限生成的，它不满足结构定理.

习题 1.37.

设R是PID，M是扭R-模. 证明：

$$\mathrm{Hom}_R(M,M)\cong\prod_P \mathrm{Hom}_R(M_P,M_P).$$

其中，M_P是M的P准素部分.

Proof. 由命题1.36，命题1.146知

$$\mathrm{Hom}_R(M,M)\cong \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_P M_P,M\Big)\cong\prod_P \mathrm{Hom}_R(M_P,M).$$

由习题1.14知，正合列

$$0\longrightarrow M_P\longrightarrow M\longrightarrow M/M_P\longrightarrow 0$$

诱导下列正合

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_P,M_P)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_P,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_P,M/M_P).$$

$\forall f\in \mathrm{Hom}_R(M_P,M/M_P)$，$\forall m\in M_P$，存在$p^n$使得$p^nm=0$. 此时

$$p^n(m'+M_p)=p^nf(m)=f(p^nm)=f(0)=\bar{0}.$$

故

$$p^nm'\in M_P\Longrightarrow m'\in M_P\Longrightarrow f(m)=m'+M_p=\bar{0},\qquad \forall m\in M.$$

从而，$f\equiv 0$. 即：

$$\mathrm{Hom}_R(M_P,M/M_P)=\{0\}.$$

故

$$\mathrm{Hom}_R(M_P,M_P)\cong \mathrm{Hom}_R(M_P,M).$$

综上所述

$$\mathrm{Hom}_R(M,M)\cong\prod_P \mathrm{Hom}_R(M_P,M_P).$$

□

Remark. 几个反例：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_i,\mathbb{Z}\Big)\cong\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_i,\mathbb{Z})\cong\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_i\ncong\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_i\cong\prod_{i=1}^{\infty}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_i,\mathbb{Z}).$$

证明见：Fuchs, *Infinite Abelian Groups* II, Section 94.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}, \bigoplus_{j=1}^{\infty}\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}\Big) \ncong \bigoplus_{j=1}^{\infty}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}\Big).$$

左端有零阶元素，而右端的元素都是有限阶的.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\prod_{n\geq 2}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\Big) \ncong \prod_{n\geq 2}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}).$$

习题 1.38.

设V是二维$\mathbb{F}_p$线性空间. 证明：V的所有一维子空间的集合与

$$P^1(\mathbb{F}_p) = (\mathbb{F}_p^2 - (0,0))/\sim$$

之间存在一一对应. 其中，等价关系“$(x,y)\sim(x',y')$”是指，存在$\lambda\in\mathbb{F}_p-\{\overline{0}\}$使得

$$(x',y') = \lambda(x,y).$$

Proof. $\forall (x,y)\in\mathbb{F}_p^2-\{(0,0)\}$

$$V_{(x,y)} := \mathrm{span}\{(x,y)\} = \{\lambda(x,y) : \lambda\in\mathbb{F}_p\}$$

为$\mathbb{F}_p^2$的一个一维子空间. 而

$$[(x,y)] = \{\lambda(x,y) : \lambda\in\mathbb{F}_p-\{0\}\}.$$

显然，$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[(x,y)]$

$$V_{(x_1,y_1)} = V_{(x_2,y_2)}.$$

故$V_{(x,y)}$可记为$V_{[(x,y)]}$. 从而，所有一维子空间与的集合与$P^1(\mathbb{F}_p) = (\mathbb{F}_p^2-(0,0))/\sim$之间存在一一对应. □

习题 1.39.

设V是五维实线性空间，且通过线性变换

$$T : V \longrightarrow V$$

成为$\mathbb{R}[x]$-模. 给出V作为$\mathbb{R}[x]$-模的结构.

Proof. 由空间分解定理知，作为$\mathbb{R}[x]$-模

$$V^T \cong \mathbb{R}[x]/(c_1)\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}[x]/(c_r).$$

其中，$r\leq 5$，$c_1,\cdots,c_r$是T在某组基下的矩阵A的不变因子，c_r是A的最小多项式.

$$c_1\cdots c_r = |xI-A|$$

是A的特征多项式.

若T给定，则取定V的一组基可以具体地算出V^T的结构. 否则，分情况讨论会变得十分复杂.

例如：取$R=\mathbb{Q}$，V是$\mathbb{Q}$上的三维线性空间. $T: V \longrightarrow V$是线性变换，它在标准基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

则

$$xI-A=\begin{pmatrix} x-2 & -3 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 0 & 0 & x+4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -x+2 & 1 \\ x-2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & x+4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -x+2 & 1 \\ 0 & x^2-4x+1 & -x+1 \\ 0 & 0 & x+4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-4x+1 & -x+1 \\ 0 & 0 & x+4 \end{pmatrix}.$$

其行列式因子为

$$D_1(x)=1, \quad D_2(x)=1, \quad D_3(x)=x^3-15+4.$$

因此

$$d_1(x)=1, \quad d_2(x)=\frac{D_2(x)}{D_1(x)}=1, \quad d_3(x)=\frac{D_3(x)}{D_2(x)}=x^3-15x+4.$$

于是，矩阵A的Smith标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3-15x+4 \end{pmatrix}.$$

故

$$V^T \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3-15x+4).$$

例如：Abel群G的生成元a,b,c满足如下关系

$$\begin{aligned} 7a+5b+2c&=0, \\ 3a+3b\qquad&=0, \\ 13a+11b+2c&=0. \end{aligned}$$

其Smith标准型为

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 13 & 11 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$c_1=1, \quad c_2=6.$$

从而

$$G \cong \mathbb{Z}^{3-2} \oplus \mathbb{Z}/(c_1) \oplus \mathbb{Z}/(c_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

□

习题 1.40.

设R是PID，p是R的素元，M是R的扭模.
证明；若$p \in \operatorname{ann}(m)$对某个非零的$m \in M$成立，则$\operatorname{ann}(M) \subseteq (p)$.

Proof. R是PID，$\operatorname{ann}(m) = (r)$是$R$的理想. 若$r = 1$，则$\operatorname{ann}(m) = R$，这与$m \neq 0$矛盾. 故

$$p \in \operatorname{ann}(m) = (r) \Longrightarrow r = p.$$

从而

$$\operatorname{ann}(M) \subseteq \bigcap_{m \in M} \operatorname{ann}(m) \subseteq (p).$$

□

习题 1.41.

设R是PID.

1) 若A, B, C都是有限生成R-模且$A \oplus B \cong A \oplus C$. 证明：$B \cong C$.
2) 若$A.B$是有限生成模且$A \oplus A \cong B \oplus B$. 证明：$A \cong B$.

Proof. 1) $F_{A\oplus B} \cong F_A \oplus F_B$，$(A \oplus B)_{\mathrm{tor}} = A_{\mathrm{tor}} \oplus B_{\mathrm{tor}}$.

由推论1.141(1)知

$$A \cong F_A \oplus A_{\mathrm{tor}}, \qquad B \cong F_B \oplus B_{\mathrm{tor}},$$

$$A \oplus B \cong F_{A\oplus B} \oplus (A \oplus B)_{\mathrm{tor}}.$$

故

$$F_{A\oplus B} \oplus (A \oplus B)_{\mathrm{tor}} \cong (F_A \oplus F_B) \oplus (A_{\mathrm{tor}} \oplus B_{\mathrm{tor}}).$$

$\forall a + b \in A_{\mathrm{tor}} \oplus B_{\mathrm{tor}} \subseteq A \oplus B$，存在$r_A, r_B$使得

$$r_A a = 0, \qquad r_B b = 0.$$

故

$$r_A r_B (a + b) = 0.$$

从而

$$a + b \in (A \oplus B)_{\mathrm{tor}}.$$

故

$$A_{\mathrm{tor}} \oplus B_{\mathrm{tor}} \subseteq (A \oplus B)_{\mathrm{tor}}.$$

$\forall a + b \in (A \oplus B)_{\mathrm{tor}}$，存在$r \in R$使得

$$r(a + b) = ra + rb = 0.$$

由于零的表示唯一，故

$$ra = 0, \qquad rb = 0.$$

从而，$a \in A_{\text{tor}}$，$B \in B_{\text{tor}}$，$a+b \in A_{\text{tor}} \oplus B_{\text{tor}}$. 于是

$$A_{\text{tor}} \oplus B_{\text{tor}} \subseteq (A \oplus B)_{\text{tor}}.$$

从而

$$A_{\text{tor}} \oplus B_{\text{tor}} = (A \oplus B)_{\text{tor}}.$$

$$F_{A\oplus B} \cong (A \oplus B)/(A \oplus B)_{\text{tor}} = (A \oplus B)/\big(A_{\text{tor}} \oplus B_{\text{tor}}\big) = F_A \oplus F_B.$$

2) $(A \oplus B)_P = A_P \oplus B_P$.

$\forall a+b \in (A \oplus B)_P$，存在$n \in \mathbb{N}$使得

$$0 = p^n(a+b) = p^n a + p^n b.$$

由于零的表示唯一，故

$$p^n a = p^n b = 0.$$

从而

$$a \in A_P, \qquad b \in B_P.$$

故

$$(A \oplus B)_P \subseteq A_P \oplus B_P.$$

$\forall a+b \in A_P \oplus B_P$，存在$m, n \in \mathbb{N}$使得

$$p^n a = 0 = p^m b.$$

故

$$p^{m+n}(a+b) = 0.$$

从而

$$a+b \in (A \oplus B)_P.$$

于是

$$(A \oplus B)_P \supseteq A_P \oplus B_P.$$

从而

$$(A \oplus B)_P = A_P \oplus B_P.$$

3) $N_{n,p}(A \oplus B) = N_{n,p}(A) + N_{n,p}(B)$.

由命题1.149知

$$A_P = \bigoplus_i R/P^{e_i}, \qquad B_P = \bigoplus_j R/P^{e_j}.$$

$$A_P \oplus B_P = \bigoplus_k R/P^{e_k}$$

令

$$N_{n,p}(X) := X_P\text{中}R/P^n\text{出现的次数}.$$

由分解的唯一性与(2)知

$$N_{n,p}(A \oplus B) = N_{n,p}(A) + N_{n,p}(B).$$

4) 对于$A \oplus B \cong A \oplus C$.

由推论1.141(2)知

$$A\oplus B\cong A\oplus C\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(F_{A\oplus B})=\operatorname{rank}(F_{A\oplus C}),\quad (A\oplus B)_{\text{tor}}\cong A\oplus C)_{\text{tor}}.$$

由(1)知

$$\operatorname{rank}(F_{A\oplus B})=\operatorname{rank}(F_A\oplus F_B)=\operatorname{rank}(F_A)+\operatorname{rank}(F_B),$$

$$\operatorname{rank}(F_{A\oplus C})=\operatorname{rank}(F_A\oplus F_C)=\operatorname{rank}(F_A)+\operatorname{rank}(F_C).$$

故

$$\operatorname{rank}(F_B)=\operatorname{rank}(F_C)\Longleftrightarrow F_B\cong F_C.$$

由命题1.146与命题1.149知

$$(A\oplus B)_{\text{tor}}\cong (A\oplus C)_{\text{tor}}\Longleftrightarrow (A\oplus B)_P\cong (A\oplus C)_P\Longleftrightarrow N_{n,p}(A\oplus B)=N_{n,p}(A\oplus C).$$

由(3)知

$$N_{n,p}(B)=N_{n,p}(C)\Longleftrightarrow B_P\cong C_P\Longleftrightarrow B_{\text{tor}}\cong C_{\text{tor}}.$$

综上所述

$$B\cong F_B\oplus B_{\text{tor}}\cong F_C\oplus C_{\text{tor}}\cong C.$$

5) 对于$A\oplus A\cong B\oplus B$

类似地，我们有

$$\operatorname{rank}(F_{A\oplus A})=\operatorname{rank}(F_{B\oplus B}),\qquad (A\oplus A)_{\text{tor}}\cong (B\oplus B)_{\text{tor}}.$$

$$\operatorname{rank}(F_{A\oplus A})=\operatorname{rank}(F_A)+\operatorname{rank}(F_A),\qquad \operatorname{rank}(F_{B\oplus B})=\operatorname{rank}(F_B)+\operatorname{rank}(F_B).$$

$$N_{n,p}(A\oplus A)=N_{n,p}(A)+N_{n,p}(A),\qquad N_{n,p}(B\oplus B)=N_{n,p}(B)+N_{n,p}(B).$$

故

$$\operatorname{rank}(F_A)=\operatorname{rank}(F_B),\qquad N_{n,p}(A)=N_{n,p}(B).$$

于是

$$F_A\cong F_B,\qquad A_P\cong B_P,\qquad A_{\text{tor}}\cong B_{\text{tor}}.$$

从而

$$A\cong F_A\oplus A_{\text{tor}}\cong F_B\oplus B_{\text{tor}}\cong B.$$

□

Remark. PID上的有限生成模的有限直和运算满足消去律.

习题 1.42.

设R是PID，M是R-模. 子模$S \subseteq M$称为纯子模是指对任意$r \in R$，均有

$$S \cap rM = rS.$$

证明：
1) 若p为非零素元，M是准素(p)-模，则S是M的纯子模当且仅当$\forall n \geq 0$

$$S \cap p^n M = p^n S.$$

2) M的直和项是M的纯子模.
3) M的扭子模M_{tor}是M的纯子模.
4) 若M/S无扭，则S是M的纯子模.
5) 设X是M的纯子模构成的集合族，且满足条件：
若$S, S' \in X$，则$S \subseteq S'$或$S' \subseteq S$. 则

$$\bigcup_{S \in X} S$$

是M的纯子模.

Proof. 1) $\Longrightarrow$) 显然.

$\Longleftarrow$) $\forall m \in M$，由M是准素(p)-模知，存在$p^n \in (p)$使得

$$p^n m = 0.$$

$\forall x \in R$，若$x \notin (p)$，则由(p)是素理想知

$$\gcd(x, p^n) = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

从而存在$s, t \in R$使得

$$sx + tp^n = 1.$$

故

$$m = sxm + tp^n m = x(sm) \in xM.$$

于是

$$xM = M, \qquad \forall x \notin (p).$$

同理，对于M的任意子模S

$$xS = S, \qquad \forall x \notin (p).$$

$\forall r \in R$，由因子分解定理

$$r = p^k r', \qquad r' \notin (p).$$

故

$$S \cap rM = S \cap p^k r' M = S \cap p^k M = p^k S = p^k r' S = rS.$$

从而，S是M的纯子模.

2) 若S是M的直和项，则存在T使得$M = S \oplus T$. $\forall r \in R$

$$S \cap rM = S \cap (rS \oplus rT) = S \cap rS = rS.$$

从而，S是M的纯子模.

3) $\forall m \in M - M_{\text{tor}}$，$\forall 0 \neq r \in R$. 若$rm \in M_{\text{tor}}$，则存在$0 \neq s \in R$使得

$$0 = s(rm) = (sr)m.$$

由于R是PID，$sr \neq 0$，故$m \in M_{\text{tor}}$. 矛盾. 从而

$$r(M - M_{\text{tor}}) \subseteq M - M_{\text{tor}}, \qquad \forall 0 \neq r \in R.$$

因此

$$M_{\text{tor}} \cap rM = M_{\text{tor}} \cap \big(rM_{\text{tor}} \cup r(M - M_{\text{tor}})\big) = rM_{\text{tor}}, \qquad \forall 0 \neq r \in R.$$

从而，S是M的纯子模.

4) $\forall m \in M - S$，$m + S \neq \overline{0}$. 由M/S无扭知

$$rm + S \neq \overline{0}, \qquad \forall 0 \neq r \in R.$$

故$rm \in M - S$. 于是

$$r(M - S) \subseteq M - S, \qquad \forall 0 \neq r \in R.$$

从而

$$S \cap rM = S \cap \big(rS \cup r(M - S)\big) = S \cap rS = rS, \qquad 0 \neq r \in R.$$

因此，S是M的纯子模.

5) 由题意知$\bigcup\limits_{S \in X} S$是$M$的子模. $\forall r \in R$

$$\Big(\bigcup_{S \in X} S\Big) \cap rM = \bigcup_{S \in X} (S \cap rM) = \bigcup_{S \in X} rS = r\Big(\bigcup_{S \in X} S\Big).$$

从而，$\bigcup\limits_{S \in X} S$是$M$的纯子模. □

习题 1.43.

设R是PID，M是有限生成R-模. 证明：S是M的纯子模当且仅当S是M的直和项.

Proof. $\Longleftarrow$) 若S是M的直和项，则存在T使得$M = S \oplus T$. $\forall r \in R$

$$S \cap rM = S \cap (rS \oplus rT) = S \cap rS = rS.$$

从而，S是M的纯子模.

$\Longrightarrow$) 只需证明：正合列

$$0 \to S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/S \to 0$$

分裂.

$\forall x \in M$，考虑循环模$(x) \cong R/I$

$$\begin{tikzcd}
& & & (x) \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "\pi"] & M/S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

我们证明：存在$g:(x)\longrightarrow M$使得$f=\pi g$.

不妨设

$$f(x)=m'+S.$$

$\forall r\in I$，

$$rm'+S=rf(x)=f(rx)=f(0)=\overline{0}.$$

故

$$rm'\in S\cap rM=rS.$$

于是，存在$s_r'\in S\subseteq M$使得

$$r(m'-s_r')=0.$$

由于R是PID，不妨设$I=(a)$，令

$$g(x)=m:=m'-s_a'.$$

则R-模同态$g:(x)\longrightarrow M$被唯一确定. 并且

$$\pi g(rx)=\pi rg(x)=\pi(rm'-rs_a')=rm'+S=f(rx),\qquad \forall rx\in(x).$$

由于M/S是PID上的有限生成模，由定理1.151，M/S同构于有限个循环模的直和. 因此，对于正合列

$$\begin{tikzcd} & & & M/S \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M/S}"] & \\ 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "\pi"] & M/S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

存在$g:M/S\longrightarrow M$使得

$$\pi g=\mathrm{id}_{M/S}.$$

故正合列分裂. 从而，S是M的直和项. $\square$

Remark. 1) 在构造$g:(x)\longrightarrow M$的过程中，令

$$g(x):=m'$$

的做法是不恰当的. 因为

$$rx=0,\qquad \forall r\in I=(a).$$

但是，我们只知道

$$rm'\in S,\qquad \forall r\in I=(a).$$

对于

$$rm'=rg(x)=g(rx)=0,\qquad \forall r\in I=(a)$$

不一定成立.

然而，令

$$g(x):=m'-s_a'$$

则可以确保不发生这样的矛盾.

可以看出，$s_a'\in S$的存在性，得益于S是纯子模.

2) 我们知道，若M是平坦R-模，则$M\otimes_R\bullet$不仅是右正合函子，还是左正合函子，从而是正合函子. 反过来，若$M\otimes_R\bullet$是正合函子，则M不一定是平坦R-模. 纯子模的定义与此有关.

习题 1.44.

设k是域，M是有限生成$k[x]$-扭模. 若M的阶是

$$(x-1)^3(x+1)^2.$$

试求M的可能结构，给出它的初等因子组和对应的不变因子.

Proof.

初等银子组	不变因子
$(x-1, x-1, x-1, x+1, x+1)$	$(x-1) \mid (x-1)(x+1) \mid (x-1)(x+1)$
$\big(x-1, (x-1)^2, x+1, x+1\big)$	$(x-1)(x+1) \mid (x-1)^2(x+1)$
$\big((x-1)^3, x+1, x+1\big)$	$(x+1) \mid (x-1)^3(x+1)$
$\big(x-1, x-1, x-1, (x+1)^2\big)$	$(x-1) \mid (x-1) \mid (x-1)(x+1)^2$
$\big(x-1, (x-1)^2, (x+1)^2\big)$	$(x-1) \mid (x-1)^2(x+1)^2$
$\big((x-1)^3, (x+1)^2\big)$	$(x-1)^3(x+1)^2$

□

Remark. 注意，阶是所有初等因子的乘积，也是所有不变因子的乘积.

设k是域，$R = k[x, y]$，$I = (x, y)$.

1) 给出I/I^2与$I/I^2 \otimes_R I/I^2$的结构.
2) 证明：$x \otimes_R y - y \otimes_R x \in I \otimes_R I$不为零.
3) 求出$x \otimes_R y - y \otimes_R x \in I \otimes_R I$的零化子，从而说明$I \otimes_R I$不是无扭的.
4) 证明：I不是平坦R-模.

Proof. 1) $\forall h_1, h_2 \in I$，存在$f_1, g_1, f_2, g_2 \in R$使得

$$h_1 = f_1 x + g_1 y, \qquad h_2 = f_2 x + g_2 y.$$

于是

$$h_1 h_2 = f_1 f_2 x^2 + (f_1 g_2 + g_1 f_2) xy + g_1 g_2 y^2 \in (x^2, xy, y^2).$$

因此，$I^2 \subseteq (x^2, xy, y^2)$. 另一方面的包含关系是显然的，故$I^2 = (x^2, xy, y^2)$. 从而

$$I/I^2 = \{k_1 x + k_2 y + I^2 : k_1, k_2 \in k\} \cong k\overline{x} \oplus k\overline{y}.$$

其中，R对$k\overline{x} \oplus k\overline{y}$的数乘作用为：$r \in I$，则数乘结果为零. 其余情况为$k[x, y]$内通常的乘法. 因此，$I/I^2$视为$k$- 模是2维$k$-线性空间.

同理

$$I/I^2 \otimes_R I/I^2 \cong k(\overline{x} \oplus_R \overline{x}) \oplus k(\overline{x} \oplus_R \overline{y}) \oplus k(\overline{y} \oplus_R \overline{x}) \oplus k(\overline{y} \oplus_R \overline{y}).$$

R对其数乘作用也是类似的. 因此，$I/I^2 \otimes_R I/I^2$视为k-模是4维k-线性空间.

2) 方法一：令$\varphi : I \times I \longrightarrow k$

$$(f, g) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}.$$

Check：φ是双线性的. 加法显然，主要是数乘.

$\forall h \in k[x,y]$

$$\varphi(hf,g) = f\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(0,0)} + h\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(0,0)} = h\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(0,0)} = h\varphi(f,g).$$

因此，φ诱导了张量积映射$\varphi' : I \otimes_R I \longrightarrow k$. 由于

$$\varphi(x,y) - \varphi(y,x) = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

故

$$\varphi'(x \otimes_R y) - \varphi'(y \otimes_R x) = 1 \neq 0.$$

从而

$$x \otimes_R y - y \otimes_R x \neq 0.$$

方法二：作基变换

$$I \otimes_R I \otimes_R R/I \cong (R/I \otimes_R I) \otimes_{R/I} (R/I \otimes_R I) \cong I/I^2 \otimes_{R/I} I/I^2.$$

那么

$$x \otimes_R y = y \otimes_R x \Longrightarrow x \otimes_R y \otimes_R \overline{1} = y \otimes_R x \otimes_R \overline{1} \Longrightarrow \overline{x} \otimes_{R/I} \overline{y} = \overline{y} \otimes_{R/I} \overline{x}.$$

但$I/I^2 \otimes_{R/I} I/I^2$是4维$k$-线性空间，这不可能.

3) 由于

$$\begin{aligned} x(x \otimes_R y - y \otimes_R x) =& x(x \otimes_R y) - x(y \otimes_R x) \\ =& (x \otimes_R y)x - xy \otimes_R x \\ =& (x \otimes_R x)y - xy \otimes_R x \\ =& y(x \otimes_R x) - xy \otimes_R x = 0. \end{aligned}$$

故

$$(x) \subseteq \mathrm{ann}(x \otimes_R y - y \otimes_R x).$$

同理

$$(y) \subseteq \mathrm{ann}(x \otimes_R y - y \otimes_R x).$$

于是

$$I = (x,y) \subseteq \mathrm{ann}(x \otimes_R y - y \otimes_R x).$$

注意到，I是$k[x,y]$的极大理想，而$\mathrm{ann}(x \otimes_R y - y \otimes_R x)$是$k[x,y]$的理想. 若

$$I \neq \mathrm{ann}(x \otimes_R y - y \otimes_R x).$$

那么

$$R = \mathrm{ann}(x \otimes_R y - y \otimes_R x).$$

但

$$1 \notin \mathrm{ann}(x \otimes_R y - y \otimes_R x).$$

矛盾.

因此

$$\mathrm{ann}(x \otimes_R y - y \otimes_R x) = I.$$

4) 不妨设I是平坦R-模. 那么，正合列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

诱导下列正合

$$0 \longrightarrow I \otimes_R I \longrightarrow I \longrightarrow R/I \otimes_R I \longrightarrow 0.$$

$\forall f \in \mathrm{Hom}_R(I \otimes_R I, I)$

$$xf(x \otimes_R y - y \otimes_R x) = f\big(x(x \otimes_R y - y \otimes_R x)\big) = f(0) = 0.$$

从而

$$f(x \otimes_R y - y \otimes_R x) = 0.$$

故

$$0 \neq x \otimes_R y - y \otimes_R x \in \ker f.$$

因此，$\mathrm{Hom}_R(I \otimes_R I, I)$中不存在单射. 这与$I$的平坦性的假设矛盾. 故$I$不是平坦$R$-模. □

Remark. 1) 这个题目给出了一个无扭但不平坦的例子.

2) 若R是交换环，F是自由R-模，$\mathfrak{m}$是R的极大理想，则

$$F/(\mathfrak{m}F) \cong (R/\mathfrak{m}) \otimes_R F \cong (R/\mathfrak{m}) \otimes_R \Big(\bigoplus_{i \in I} R_i\Big) \cong \bigoplus_{i \in I} \big((R/\mathfrak{m}) \otimes_R R_i\big) \cong \bigoplus_{i \in I} R_i/\mathfrak{m}.$$

而$R/\mathfrak{m}$是一个域，故$\bigoplus\limits_{i \in I} R_i/\mathfrak{m}$作为$R/\mathfrak{m}$-模是一个线性空间.

3) 在证明

$$x \otimes_R y - y \otimes_R x \in I \otimes_R I$$

不为零时，我们可以使用如下引理：

设M, N是R-模，$\{n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$是$N$的一组生成元. 那么

$$t = \sum_{\lambda \in \Lambda'} m_\lambda \otimes_R n_\lambda, \qquad \forall t \in M \otimes_R N.$$

其中，$m_\lambda \in M$，Λ'是Λ的有限子集. 更进一步地，$t = 0$当且仅当存在某个有限集Σ'以及$x_{\lambda\sigma} \in R$，$m_\sigma \in M$使得

$$\sum_{\sigma \in \Sigma'} x_{\lambda\sigma} m_\sigma = m_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda', \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda'} x_{\lambda\sigma} n_\lambda = 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma'.$$

视右侧的$y, x = n_\lambda$，若

$$0 = x \otimes_R y - y \otimes_R x \in I \otimes_R I.$$

则引理中的$x_{\lambda\sigma} = 0$. 这意味着$x, y = m_\lambda = 0$，矛盾.

Proof. $M \otimes_R N$由形如$m \otimes n$，$m \in M$，$n \in N$的元素生成. 不妨设

$$n = \sum_{\lambda \in \Lambda''} x_\lambda n_\lambda, \qquad x_\lambda \in R, \quad n_\lambda \in N.$$

那么

$$m \otimes_R n = \sum_{\lambda \in \Lambda''} (x_\lambda m) \otimes_R n_\lambda.$$

于是，t可以表示为

$$t = \sum_{\lambda \in \Lambda'} m_\lambda \otimes_R n_\lambda, \qquad \forall t \in M \otimes_R N.$$

若存在某个有限集Σ'以及$x_{\lambda\sigma} \in R$，$m_\sigma \in M$ 使得

$$\sum_{\sigma \in \Sigma'} x_{\lambda\sigma} m_\sigma = m_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda', \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda'} x_{\lambda\sigma} n_\lambda = 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma'.$$

那么

$$t = \sum_{\lambda \in \Lambda'} m_\lambda \otimes_R n_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda'} \Big(\sum_{\sigma \in \Sigma'} x_{\lambda\sigma} m_\sigma \Big) \otimes_R n_\lambda = \sum_{\sigma \in \Sigma'} \Big(m_\sigma \otimes_R \sum_{\lambda \in \Lambda'} x_{\lambda\sigma} n_\lambda \Big) = 0.$$

反之，任意一个模都是某个自由模的商模，即某个自由模的同态像. 因此，存在某个自由模F以及β，使得$\mathrm{im}\beta = \ker \alpha$. 于是有正合列

$$\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} Re_\sigma \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Re_\lambda \xrightarrow{\alpha} N \longrightarrow 0.$$

其中，$\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$是自由模$\bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} Re_\lambda$的一组标准基且

$$\alpha(e_\lambda) = n_\lambda, \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

由张量积函子的右正合性

$$M \otimes_R \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} Re_\sigma \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes_R \beta} M \otimes_R \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Re_\lambda \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes_R \alpha} M \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

更进一步地，若

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} m_\lambda \otimes_R n_\lambda = 0.$$

那么

$$(\mathrm{id}_M \otimes_R \alpha)\Big(\sum_{\lambda \in \Lambda'} m_\lambda \otimes_R e_\lambda \Big) = 0.$$

由正合性，存在$s \in M \otimes_R \bigoplus\limits_{\sigma \in \Sigma} Re_\sigma$使得

$$(\mathrm{id}_M \otimes_R \beta)(s) = \sum_{\lambda \in \Lambda'} m_\lambda \otimes_R e_\lambda.$$

不妨设$\{e_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$是$M \otimes_R \bigoplus\limits_{\sigma \in \Sigma} Re_\sigma$的一组标准基，则$s$可以表示为

$$s = \sum_{\sigma \in \Sigma'} m_\sigma \otimes_R e_\sigma, \qquad m_\sigma \in M.$$

而$\beta(e_\sigma)$可以表示为

$$\beta(e_\sigma) = \sum_{\lambda \in \Lambda'} x_{\lambda\sigma} e_\lambda, \qquad \forall \sigma \in \Sigma'.$$

由正合性

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} x_{\lambda\sigma} n_\lambda = \alpha\beta(e_\sigma) = 0, \qquad \forall \sigma \in \Sigma'.$$

此时

$$0 = \sum_{\lambda \in \Lambda'} m_\lambda \otimes_R e_\lambda - \sum_{\sigma \in \Sigma'} m_\sigma \otimes_R \Big(\sum_{\lambda \in \Lambda'} x_{\lambda\sigma} e_\lambda \Big) = \sum_{\lambda \in \Lambda'} \Big(m_\lambda - \sum_{\sigma \in \Sigma'} x_{\lambda\sigma} m_\sigma \Big) \otimes_R e_\lambda.$$

$\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是自由模$\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} Re_\lambda$的一组标准基，因此它们线性无关. 故

$$m_\lambda = \sum_{\sigma\in\Sigma'} x_{\lambda\sigma} m_\sigma, \qquad \forall \lambda \in \Lambda'.$$

$\square$

Chapter 2. Commutative Algebra.

习题 2.1.

设R是Noether环. 证明：M是Noether R-模当且仅当M是有限生成R- 模.

Proof. $\Longrightarrow$) 若M是Nother R-模，作为自身的子模，M是有限生成的.

$\Longleftarrow$) 由于M是有限生成R-模，存在某个$n \in \mathbb{N}$以及R-模K使得

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

正合. 由于R是Noether环，由习题2.2知，R^n是Noether R-模. 由命题2.11.(1)知，K, M是Noether R-模. $\square$

习题 2.2.

设R是Noether环. 证明：R^n是Noether R-模.

Proof. 令$R_i = R$，$i \in \mathbb{N}$，由命题2.11.(2)知，正合列

$$0 \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_1 \oplus R_2 \longrightarrow R_2 \longrightarrow 0$$

给出$R^2 \cong R_1 \oplus R_2$是Noether R-模.

由数学归纳法知，正合列

$$0 \longrightarrow R_n \longrightarrow R_1 \oplus \cdots \oplus R_n \longrightarrow R_1 \oplus \cdots \oplus R_{n-1} \longrightarrow 0$$

给出$R^n \cong R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$是Noether R-模. $\square$

Remark. 若R^n是Noether环，作为它的商环

$$R \cong R^n / R^{n-1}$$

也是Noether环.

更一般的，Noether环的有限直和与直和项都是Noether环.

习题 2.3.

设k是域. 证明：多项式环$k[x]$中包含k的子环都是Noether环.

Proof. 设R是$k[x]$中包含k的子环. 若$R = k$，则R是Noether环. 若$R \neq k$，取$f \in R - k$. 由于$k \subseteq R$，不妨设f是首一的且$\deg(f) = n$. 令$\varphi : k[x] \longrightarrow k[f]$

$$x \longmapsto f.$$

显然，φ是满射，从而

$$k[x]/\ker\varphi \cong k[f].$$

域k是Noether环，由Hilbert基定理知，$k[x]$是Noether环，从而$k[f]$作为$k[x]$的商环也是Noether环. 显然

$$k[f] \subseteq R \subseteq k[x]$$

因此，$k[x]$与R可以视为$k[f]$-模.

我们证明：$k[x]$是$k[f]$上的有限生成模且$\{1, x, \cdots, x^n\}$是它的一组生成元.

$\forall g \in k[x]$，若$0 \leq \deg(g) \leq n$，由于$k \subseteq k[f]$，$k[x]$显然可以由$\{1, x, \cdots, x^n\}$生成.

不妨设$\deg(g) = k-1$时，g可以由$\{1, x, \cdots, x^n\}$生成.

那么，对于$\deg(g) = k$，做带余除法

$$k = qn + r, \qquad 0 \leq r < n.$$

不妨设g是首一多项式，那么

$$\deg(g - f^q x^r) \leq k - 1.$$

从而，$g - f^q x^r$可以被$\{1, x, \cdots, x^n\}$生成. 故g可以被$\{1, x, \cdots, x^n\}$生成. 由数学归纳法知，$k[x]$是$k[f]$上的有限生成模，从而$k[x]$ 是Noether $k[f]$-模.

显然，R作为$k[f]$-模是$k[x]$的子模，从而也是Noether $k[f]$-模. R中的理想I作为R的$k[f]$-子模在$k[f]$上都是有限生成的，因而I在$R \supseteq k[f]$上也是有限生成的. 故I是R的有限生成理想. 因此，R 是Noether环. □

Remark. 1) Noether模的子模是Noether模，但Noether环的子环不一定是Noether环. 域是Noether环，任意一个整环R都可以扩充成为其商域$\mathrm{Frac}(R)$. 因此，整环R可以不是Noether环，但它一定是Noether环$\mathrm{Frac}(R)$的子环. 要求$k[x]$的子环包含k就是为了避免这种情况出现.

2) $k[x]$在$k[f]$上整，从而是有限生成$k[f]$-模.

Proof. 显然，x是$k[f]$上的关于变量y的多项式

$$g(y) := f(y) - f(x)$$

的根. 从而，x在$k[f]$上整. 由命题2.43.(2)，$k[f][x] = k[x]$是有限生成$k[f]$-模. □

3) 设I是R的理想，我们证明I在R上是有限生成的.

Proof. 令

$$n := \min\{\deg(f) : f \in I\}.$$

由于$k \subseteq R$，取首一的$f_0 \in I$使得$\deg(f_0) = n$. 取首一的f_k使得

$$\deg(f_k) = \min\{\deg(f) : f \in I, \deg(f) \equiv k (\bmod n)\}.$$

若不存在这样的f_k就把它记为$f_k := 0$.

我们证明：I由$\{f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}\}$生成.

$s < n$时，$I \cap \{f : 0 \leq \deg(f) \leq s\} = \varnothing$. 因为$I$中的最低次多项式是$n$次的.

$s = n$时，$\forall g \in I \cap \{f : 0 \leq \deg(f) \leq s\}$，$\deg(g) = n$. 做带余除法

$$g = qf_0 + r, \qquad q \in k \subseteq R, \quad 0 \leq \deg(r) < n.$$

显然，$r = g - qf_0 \in I$. 若$r \neq 0$，则$\deg(r) < \deg(f_0)$，这与f_0的选取矛盾. 故$f_0 \mid g$，从而g由f_0生成.

设$s=m\geq n$时，命题成立. $\forall g\in I\cap\{f:0\leq\deg(f)\leq m+1\}$，则

$$\deg(g)\equiv j(\mathrm{mod} n),\qquad 0\leq j\leq n-1.$$

由f_k的取法知，存在$a\in\mathbb{N}$使得

$$\deg(g)=a\deg(f_0)+\deg(f_j).$$

由于$k\subseteq R$，不妨设g是首一多项式. 此时

$$\deg(g-(f_0)^a f_j)\leq\deg(g)-1\leq m.$$

由归纳假设知，$g-(f_0)^a f_j$由$\{f_0,f_1,\cdots,f_{n-1}\}$生成. 故$g$ 由$\{f_0,f_1,\cdots,f_{n-1}\}$生成. 由数学归纳法知，$I$由$\{f_0,f_1,\cdots,f_{n-1}\}$生成. 从而，$R$是Noether环. □

习题 2.4.

证明：R是Noether环当且仅当R中每个素理想都是有限生成的.

Proof. $\Longrightarrow$) 显然. R是Noether环，则它的每个理想都是有限生成的，自然也包括素理想.

$\Longleftarrow$) 令

$$\Lambda:=\{I_\lambda\subseteq R:I_\lambda\text{不是有限生成理想}\}.$$

若$\Lambda\neq\varnothing$，那么它以包含关系构成非空偏序集，并且同一条链中所有理想的并I显然是个理想. 若I是有限生成的，则它的生成元分别含于这条链中的有限个理想内. 由包含关系知，所有生成元都含在这有限个理想中的最大的那个理想I'内. 从而，$I\subseteq I'\subseteq I$可被有限生成. 这与$I'\in\Lambda$矛盾. 于是，I不是有限生成的. 即：$I\in\Lambda$是这条链的上界. 由Zorn引理，Λ有极大元$\mathfrak{a}$. 下证$\mathfrak{a}$是素理想，从而是有限生成的，这与$a\in\Lambda$矛盾. 于是，$\Lambda=\varnothing$. 故R是Noether环.

若$\mathfrak{a}$不是素理想，则存在$x,y\in R$使得$x,y\notin\mathfrak{a}$但$xy\in\mathfrak{a}$. 由于$\mathfrak{a}$极大，故$(x)+\mathfrak{a}\supsetneqq\mathfrak{a}$不在$\Lambda$中. 故$(x)+\mathfrak{a}$是有限生成理想. 不妨设它的一组生成元为

$$x,a_1,\cdots,a_n.$$

其中，$a_1,\cdots,a_n\in\mathfrak{a}$.

$\forall a\in\mathfrak{a}\subseteq(x)+\mathfrak{a}$，存在$a_0\in(a_1,\cdots,a_n)$，$b\in R$使得

$$a=a_0+bx.$$

故

$$bx=a-a_0\in\mathfrak{a}.$$

即

$$b\in(\mathfrak{a}:x):=\{r\in R:rx\in\mathfrak{a}\}.$$

于是

$$\mathfrak{a}\subseteq(a_1,\cdots,a_n)+x(\mathfrak{a}:x).$$

显然，$x(\mathfrak{a}:x)\subseteq\mathfrak{a}$. 因此

$$(a_1,\cdots,a_n)+x(\mathfrak{a}:x)\subseteq\mathfrak{a}.$$

故

$$(a_1,\cdots,a_n)+x(\mathfrak{a}:x)=\mathfrak{a}.$$

显然，$(\mathfrak{a}:x)\supseteq\mathfrak{a}$. 由于$xy\in\mathfrak{a}$，故$y\in(\mathfrak{a}:x)$. 又因为$y\notin\mathfrak{a}$，故

$$(\mathfrak{a}:x)\supsetneqq\mathfrak{a}.$$

由$\mathfrak{a}$的极大性知，$(\mathfrak{a}:x)\notin\Lambda$是有限生成理想. 故

$$\mathfrak{a}=(a_1,\cdots,a_n)+x(\mathfrak{a}:x)$$

也是有限生成理想. 这与$\mathfrak{a}\in\Lambda$矛盾. 因此，$\mathfrak{a}$是素理想. □

Remark. 环R中所有非有限生成的理想构成的集合Σ 具有极大元I，这由Zorn引理所保证. 这个极大元I一定是一个素理想. 可以看出，环R中的素理想都是有限生成的，决定了R中所有理想都是有限生成的. 因此，素理想在环中具有特殊地位.

习题 2.5.

设R是Noether环. 证明：幂级数环$R[[x]]$是Noether环.

Proof. 我们证明，$R[[x]]$中的素理想都是有限生成的. 从而，由习题2.4知，$R[[x]]$是Noether环.

设$\mathcal{P}\in\mathrm{Spec}\big(R[[x]]\big)$，令$\varphi:R[[x]]\longrightarrow R$

$$\sum_{j=0}^{\infty}r_jx^j\longmapsto r_0.$$

则φ是一个满同态，故$\varphi(\mathcal{P})$是R中的理想. 由于R是Noether环，$\varphi(\mathcal{P})$是有限生成的，不妨设它的一组生成元为

$$\big\{a_0^{(1)},\cdots,a_0^{(t)}\big\}.$$

设$a_0^{(i)}$的一个原像为

$$f^{(i)}=\sum_{j=0}^{\infty}a_j^{(i)}x^j,\qquad i=1,2,\cdots,t.$$

1) 若$x\in\mathcal{P}$，则$\mathcal{P}$由$\big\{a_0^{(1)},\cdots,a_0^{(t)},x\big\}$生成.

显然

$$a_0^{(i)}=f^{(i)}-x\sum_{j=0}^{\infty}a_{j+1}^{(i)}x^j\in\mathcal{P},\qquad i=1,2,\cdots,t.$$

$\forall f=\sum\limits_{j=0}^{\infty}b_jx^j\in\mathcal{P}$

$$b_0\in\varphi(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{t}a_0^{(i)}R\subseteq\sum_{i=1}^{t}a_0^{(i)}R[[x]].$$

故

$$f=b_0+x\sum_{j=0}^{\infty}b_{j+1}^{(i)}x^j\in\sum_{i=1}^{t}a_0^{(i)}R[[x]]\oplus xR[[x]].$$

2) 若$x\notin\mathcal{P}$，则$\mathcal{P}$由$\big\{f^{(1)},\cdots,f^{(t)}\big\}$生成.

我们使用数学归纳法证明，$\forall f=\sum\limits_{j=0}^{\infty}b_jx^j\in\mathcal{P}$，$\forall n\in\mathbb{N}$，存在$g_n\in R[[x]]$以及

$$\big\{b_0^{(1)},\cdots,b_0^{(t)},b_1^{(1)},\cdots,b_1^{(t)},\cdots,b_{n-1}^{(1)},\cdots,b_{n-1}^{(t)}\big\}\subseteq R$$

使得

$$f-\sum_{i=1}^{t}f^{(i)}\left(\sum_{j=0}^{n-1}b_j^{(i)}x^j\right)=x^ng_n.$$

$n=1$时，$b_0\in\varphi(\mathcal{P})$，存在$\{b_0^{(1)},\cdots,b_0^{(t)}\}\subseteq R$使得

$$b_0=\sum_{i=1}^{t}a_0^{(i)}b_0^{(i)}.$$

故

$$f-\sum_{i=1}^{t}b_0^{(i)}f^{(i)}=xg_1.$$

现在设

$$f-\sum_{i=1}^{t}f^{(i)}\left(\sum_{j=0}^{n-1}b_j^{(i)}x^j\right)=x^ng_n$$

成立. 注意到上式左边位于$\mathcal{P}$中，而$x\notin\mathcal{P}$，由$\mathcal{P}$是素理想知，$g_n\in\mathcal{P}$. 从而，由$n=1$时的结论，存在$g_{n+1}\in R[[x]]$以及$\{b_n^{(1)},\cdots,b_n^{(t)}\}\subseteq R$使得

$$g_n-\sum_{i=1}^{t}b_n^{(i)}f^{(i)}=xg_{n+1}.$$

故

$$f-\sum_{i=1}^{t}f^{(i)}\left(\sum_{j=0}^{n-1}b_j^{(i)}x^j\right)=x^n\left(xg_{n+1}+\sum_{i=1}^{t}b_n^{(i)}f^{(i)}\right).$$

即

$$f-\sum_{i=1}^{t}f^{(i)}\left(\sum_{j=0}^{n}b_j^{(i)}x^j\right)=x^{n+1}g_{n+1}.$$

令

$$e^{(i)}:=\sum_{j=0}^{\infty}b_j(i)x^i\in R[[x]].$$

则由上述命题知，$\forall n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}f-\sum_{i=1}^{t}e^{(i)}f^{(i)}=&x^ng_n+\sum_{i=1}^{t}f^{(i)}\left(\sum_{j=0}^{n-1}b_j^{(i)}x^j\right)-\sum_{i=1}^{t}f^{(i)}\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_j(i)x^i\right)\\=&x^ng_n-\sum_{i=1}^{t}f^{(i)}\left(\sum_{j=n}^{\infty}b_j(i)x^i\right)\in x^nR[[x]].\end{aligned}$$

从而

$$f-\sum_{i=1}^{t}e^{(i)}f^{(i)}\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}x^nR[[x]]=\{0\}.$$

故

$$f=\sum_{i=1}^{t}e^{(i)}f^{(i)}\in\sum_{i=1}^{t}f^{(i)}R[[x]].$$

□

Remark. 1) 此命题也可以仿照Hilbert基定理的构造性证明. 由于幂级数不像多项式一样有次数，我们需要定义一个阶数$o(f)$来代替次数的作用. 此即：幂级数的阶数为，幂级数中最低次项的次数. 和多项式的次数类似，幂级数的阶数也有一些相应的性质. 例如：

$$o(fg) \geq o(f)o(g), \qquad o(f+g) \geq \min\big(o(f)+o(g)\big).$$

Proof. 设B为$R[[x]]$中的理想，我们构造它的一组基.

$\forall j = 0, 1, 2, \cdots$，令

$$I_j := \{b_j \in R : \text{存在} g_j \in B, o(g_j) > j, f_j = b_j x^j + g_j \in B\}.$$

那么，I_j是R中的理想且

$$xf_j = b_j x^{j+1} + xg_j \in B.$$

故$b_j \in I_{j+1}$. 从而，$I_j \subseteq I_{j+1}$. 由于R是Noether环，不妨设

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots$$

在I_m处稳定. 设I_m的一组生成元为

$$\{b_m^{(1)}, \cdots, b_m^{(k)}\}.$$

由幂级数阶的性质知

$$I := \{f \in R[[x]] : o(f) \geq m\}$$

是$R[[x]]$中的理想. 令$B_m := B \cap I$. 由I_m的定义知，存在$g_m^{(1)}, \cdots, g_m^{(k)} \in B$使得

$$f_m^{(1)} = b_m^{(1)} x^m + g_m^{(1)}, \cdots, f_m^{(k)} = b_m^{(k)} x^m + g_m^{(k)}, \qquad o(g_m^{(i)}) > m, \quad 1 \leq i \leq k.$$

显然，$f_m^{(1)}, \cdots, f_m^{(k)} \in B_m$.

$\forall f = b_n x^n + g_n \in B_m$，$b_n \in R$，$o(g_n) > n$，$n \geq m$. 由于$b_n \in I_n = I_m$，存在$a_1, \cdots, a_k \in R$使得

$$b_n = \sum_{i=1}^{k} a_i b_m^{(i)}.$$

此时

$$o\Big(f - \sum_{i=1}^{k} a_i x^{n-m} f_m^{(i)}\Big) > n.$$

重复上述过程，我们可以得到一列整数

$$n_1 = n - m < n_2 < n_3 < \cdots$$

以及$a_{ij} \in R$，$1 \leq i \leq k$，$j = 1, 2, \cdots$使得

$$o\Big(f - \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x^{n_j}\Big) f_m^{(i)}\Big) > n + n_r \longrightarrow \infty, \qquad r = 1, 2, \cdots.$$

令

$$a_i = \lim_{r \to \infty} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x^{n_j} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x^{n_j} \in R[[x]].$$

则
$$f=\sum_{i=1}^{k}a_i f_m^{(i)}.$$
故B_m的一组生成元为$f_m^{(1)},\cdots,f_m^{(k)}\in B_m$.

对于$I_j\subseteq R$，$0\le j<m$，由于R是Noether环，它们都是有限生成的. 选择生成元
$$b_j^{(1)},\cdots b_j^{(k_j)}\in I_j,\qquad 0\le j<m.$$
由$I_j\subseteq R$，$0\le j<m$的定义知，存在相应的$g_j^{(1)},\cdots,g_j^{(k_j)}$，$1\le j<m$使得
$$f_j^{(1)}=b_j^{(1)}x^j+g_j^{(1)},\cdots,f_j^{(k_j)}=b_j^{(k_j)}x^j+g_j^{(k_j)},\qquad o(g_j^{(i)})>j,\quad 1\le i\le k_j,\quad 1\le j<m.$$

$\forall f=b_nx^n+g_n\in B$，$b_n\in R$，$o(g_n)>n$，$n<m$，与$n\ge m$的情形类似，由数学归纳法知，可以利用
$$\{f_0^{(1)},\cdots,f_0^{(k_0)},f_1^{(1)},\cdots,f_1^{(k_1)},\cdots,f_{m-1}^{(1)},\cdots,f_{m-1}^{(k_{m-1})}\}$$
通过有限步，逐步把f的阶数升高得到
$$o(f)<o(f^{(1)})<\cdots<m\le o(f^{(m)}).$$
从而，转化到$n\ge m$的情形.

综上所述，B的一组生成元为
$$\{f_0^{(1)},\cdots,f_0^{(k_0)},f_1^{(1)},\cdots,f_1^{(k_1)},\cdots,f_{m-1}^{(1)},\cdots,f_{m-1}^{(k_{m-1})},f_m^{(1)},\cdots,f_m^{(k)}\}.$$
故$R[[x]]$是Noether环. □

2) 由数学归纳法可知，若R是Noether环，则
$$R[[x_1,\cdots,x_n]]=R[[x_1,\cdots,x_{n-1}]][[x_n]]$$
也是Noether环.

习题 2.6.

设M是Noether R-模. 证明：$R/\mathrm{ann}(M)$是Noether环.

Proof. 由于M是Noether R-模，从而是有限生成模. 设M的一组生成元为
$$\{m_1,\cdots,m_n\}.$$
考虑R-模同态$f:R\longrightarrow M^n$
$$r\longmapsto(rm_1,\cdots,rm_n).$$
显然
$$\ker f=\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{ann}(m_i)=\mathrm{ann}(M).$$
由推论2.12知，M^n也是Noether R-模，由命题2.11.(1)知，其子模
$$R/\mathrm{ann}(M)=R/\ker f\cong \mathrm{im} f\subseteq M^n$$
是Nother R-模.

商环$R/\mathrm{ann}(M)$的理想I是Nother R-模$R/\mathrm{ann}(M)$的子模. 故商环$R/\mathrm{ann}(M)$中的任意一条理想升链都可以视为Nother R- 模$R/\mathrm{ann}(M)$的一条子模升链，从而必稳定. 于是，商环$R/\mathrm{ann}(M)$是Noether环. □

Remark. 若将条件改为Artin模，则结论将不一定成立. 考虑$\mathbb{Z}$-模$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，它是一个Artin模. 显然

$$\mathrm{ann}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \{0\}.$$

但

$$\mathbb{Z}/\mathrm{ann}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

不是Artin模.

主要原因就是Artin $\mathbb{Z}$-模$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$不是有限生成的. 在加上有限生成的条件后，结论将成立. 见习题2.11.

反过来，若M是有限生成R-模，它自然也是有限生成$R/\mathrm{ann}(M)$- 模. 这是因为$\mathrm{ann}(M)$中的元素对于数乘作用没有任何的贡献. 若$R/\mathrm{ann}(M)$是Noether 环，故M是Noether $R/\mathrm{ann}(M)$- 模. 考虑M作为R-模的一条子模升链，它也是M作为Noether $R/\mathrm{ann}(M)$-模的一条子模升链，从而必稳定. 故M也是Noether R-模.

习题 2.7.

证明Hilbert基定理的逆定理：若$R[x]$是Noether环，则R也是Noether 环.

Proof. 考虑满同态$\varphi : R[x] \longrightarrow R$

$$f \longmapsto f(0).$$

由同态基本定理

$$R = \mathrm{im}\varphi \cong R[x]/\ker\varphi = R[x]/(x)$$

是Noether环$R[x]$的商环. 因此，R也是Noether环. □

习题 2.8.

证明:
1) 设k是域，则多项式环$k[x_i]_{i\in I}$不是Noether环. 其中I的阶无限.
2) 设k是域，则多项式环$k[x,y]$的子环$k+xk[x,y]$不是Noether环.
3) $C[a,b]$不是Noether环.
4) 无限集X到$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的全体函数构成的环.

Proof. 1) 令$I_i = (x_1, \cdots, x_i)$，$i \in \mathbb{N}$，则

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$

是一条严格的理想升链.

2) 考虑集合

$$S := \{xy^n : n \in \mathbb{N}\}$$

生成的理想

$$(S) := (x, xy, xy^2, \cdots, xy^n, \cdots).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$，$\forall f_1, \cdots, f_n \in (S)$，不妨设它们之中$y$的最高次数为$n_y$. 则

$$xy^{n_y+1} \notin (f_1, \cdots, f_n).$$

从而，(S)不是有限生成的.

3) 令

$$C_n := \Big(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\Big), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

则

$$C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n \subset \cdots.$$

令

$$I_n := \{f : f(x) = 0, x \in [a,b] - C_n\}.$$

则

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$

是一条严格的理想升力链.

4) 无限集X到$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的函数可视为X的子集E_i的特征函数χ_{E_i}. 显然

$$\chi_A + \chi_A = 2\chi_A = 0 = \chi_\varnothing, \qquad \chi_A - \chi_A = 0 = \chi_\varnothing.$$

$$\chi_A \chi_B = \chi_{A\cap B}.$$

从而，χ_A生成的理想中的元素与A的子集之间有一个一一对应的关系. 由于X 是无限集，从而存在严格升链

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots.$$

于是

$$\rho(E_1) \subset \rho(E_2) \subset \cdots \subset \rho(E_n) \subset \cdots.$$

由一一对应关系知

$$(\chi_{E_1}) \subset (\chi_{E_2}) \subset \cdots \subset (\chi_{E_n}) \subset \cdots$$

是一条严格的理想升链. □

习题 2.9.

设$f : R \longrightarrow T$和$g : S \longrightarrow T$是环的满同态

$$R \times_T S := \{(r,s) : f(r) = g(s)\}$$

为其纤维积. 证明：若R与S是Noether环，则$R \times_T S$也是Noether环.

Proof. 显然，$R \times_T S$是$R \times S$的子环. 我们证明：$R \times_T S$中的任意理想I都是有限生成的，从而$R \times_T S$是一个Noether环. 证明的思路为：各自去找生成元.

令$\pi_R : R \times S \longrightarrow R$，$\pi_S : R \times S \longrightarrow S$为典范投射.

1) $\pi_R(I)$是R中的理想，从而是有限生成的.

显然，$\pi_R(I)$是一个Abel群. 只需验证对乘法封闭.

$\forall r_0 \in \pi_R(I)$，$\forall r \in R$，由于$\pi_R|_I : I \longrightarrow \pi_R(I)$是满射，存在$s_0 \in S$使得

$$(r_0, s_0) \in I.$$

由于f, g是满射，对于$f(r) \in T$，存在$s \in S$使得

$$f(r) = g(s).$$

按照$R \times_T S$的定义

$$(r,s) \in R \times_T S.$$

故

$$rr_0 = \pi(rr_0, ss_0) = \pi\big((r,s)(r_0,s_0)\big) \in \pi_R(I).$$

不妨设$\pi_R(I)$的一组生成元为

$$\{r_1, \cdots, r_n\}.$$

相应的，存在$s_1, \cdots, s_n \in S$使得

$$(r_1, s_1), \cdots, (r_n, s_n) \in I.$$

2) $\forall (r,s) \in I$，由于$r \in \pi(I)$，存在$a_1, \cdots, a_n \in R$使得

$$r = a_1 r_1 + \cdots + a_n r_n.$$

相应地，由于f, g是满射，存在$b_1, \cdots, b_n \in S$使得

$$(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n) \in R \times_T S.$$

3) 令

$$I' := \{(r,s) \in I : r = 0\}.$$

则$(0,0) \in I'$，故$\varnothing \neq I' \subseteq I$是$R \times_T S$的理想. 由于$\pi_S(I')$是$S$的理想，从而是有限生成的. 不妨设$\pi_S(I')$的一组生成元为

$$\{\overline{s}_1, \cdots, \overline{s}_m\}.$$

考虑

$$(r,s) - \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i)(r_i, s_i) = \big(0, s - (b_1 s_1 + \cdots + b_n s_n)\big) := (0, \overline{s}) \in I'.$$

显然，$\overline{s} \in \pi_S(I')$. 那么，存在$\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_m \in S$使得

$$\overline{s} = \overline{b}_1 \overline{s}_1 + \cdots + \overline{b}_m \overline{s}_m.$$

此时，由于f, g是满射，存在$\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m \in R$ 使得

$$(\overline{a}_1, \overline{b}_1), \cdots, (\overline{a}_m, \overline{b}_m) \in R \times_T S.$$

又由于$\pi_S|_{I'} : I' \longrightarrow \pi_S(I')$是满射，故

$$(0, \overline{s}_1), \cdots, (0, \overline{s}_m) \in I' \subseteq I.$$

4) I由$(r_1, s_1), \cdots, (r_n, s_n), (0, \overline{s}_1), \cdots, (0, \overline{s}_m)$ 生成.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i)(r_i, s_i) + \sum_{j=1}^{m} (\overline{a}_j, \overline{b}_j)(0, \overline{s}_j) = (r,s) - (0, \overline{s}) + (0, \overline{s}) = (r,s).$$

其中，$(r_1, s_1), \cdots, (r_n, s_n), (0, \overline{s}_1), \cdots, (0, \overline{s}_m)$ 的选择只依赖于I. □

Remark. 1) 由于$f : R \longrightarrow T$，$g : S \longrightarrow T$是满射. 因此，$\alpha : R \times_T S \longrightarrow R$，$\beta : R \times_T S \longrightarrow S$也是满射.

$$\begin{tikzcd}
R \times_T S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & R \arrow[d, "f"] \\
S \arrow[r, "g"'] & T
\end{tikzcd}$$

定义数乘运算$(R\times_T S)\times R\longrightarrow R$

$$\big((r,s),r'\big)\longmapsto \alpha(r,s)r'.$$

因此，R可以视为$R\times_T S$-模. 由于R是Noether环，因此R是Noether R-模. R的理想I视为R的子R-模是有限生成的，而α 是满射，故I视为R的子$R\times_T S$-模也是有限生成的. 故R是Noether $R\times_T S$-模.

同理，令$(R\times_T S)\times R\longrightarrow S$

$$\big((r,s),s'\big)\longmapsto \beta(r,s)s'.$$

则S也是Noether $R\times_T S$-模. 故$R\times S$是Noether $R\times_T S$-模. 显然，$R\times_T S$作为$R\times S$的子环是子$R\times_T S$-模. 从而，$R\times_T S$也是Noether $R\times_T S$-模. 故$R\times_T S$是Noether环.

2) 设$I_1,\cdots,I_n$是环R的理想. 若$\bigcap\limits_{i=1}^n I_i=\{0\}$且$R/I_i$，$1\le i\le n$是Noether 环. 那么，$R$也是Noether环.

Proof. 令$\varphi: R\longrightarrow R/I_1\oplus\cdots\oplus R/I_n$

$$r\longmapsto (r+I_1,\cdots,r+I_n).$$

则

$$R/\ker\varphi\cong \mathrm{im}\varphi.$$

R/I_i是Noether环，自然也是Noether R/I_i-模，从而R/I_i的子模视为R/I_i-模都是有限生成的. 显然，R/I_i也是R-模，故R/I_i的子模视为R-模也都是有限生成的. 因此，R/I_i是Noether R-模.

由于

$$\ker\varphi=\bigcap_{i=1}^n I_i=\{0\}.$$

故

$$R\cong \mathrm{im}\varphi$$

是Noether R-模$R/I_1\oplus\cdots\oplus R/I_n$的子模. 于是，$R$是Noether R-模. 从而，R是Noether环. □

由于

$$(R\times_T S)/\ker\alpha\cong \mathrm{im}\alpha=R,\qquad (R\times_T S)/\ker\beta\cong \mathrm{im}\beta=S$$

是Noether环且$\ker\alpha\cap\ker\beta=\{0\}$. 故$R\times_T S$是Noether 环.

习题 2.10.

设p是素数. 证明：$\mathbb{Z}$-模$M:=\mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$是Artin模，但不是Noether模.

Proof. 1) M的真子模都是有限生成的.

设N是M的一个真子模，$\forall 0\ne q\in N$，它可以表示为

$$q=\frac{n}{p^e}.$$

其中，$\gcd(n,p)=1$. 从而，存在$m\in\mathbb{Z}$使得

$$mn\equiv 1\mod (p^e).$$

从而

$$\frac{1}{p^e}=m\cdot\frac{n}{p^e}\in N.$$

故

$$\frac{1}{p^r} = p^{e-r} \cdot \frac{1}{p^e} \in N, \qquad \forall 0 \le r \le e.$$

若N不是有限生成的，则存在$e_1 > e$使得

$$\frac{1}{p^{e_1}} \in N.$$

否则，N由$\dfrac{1}{p^e}$生成. 同理，存在$e_2 > e_1 > e$使得

$$\frac{1}{p^{e_2}} \in N.$$

否则，N由$\dfrac{1}{p^e}, \dfrac{1}{p^{e_1}}$生成. 以此类推，我们得到

$$e < e_1 < \cdots < e_n < \cdots.$$

从而，$\forall n \in \mathbb{N}$，存在$e_{k_n} > n$使得

$$\frac{1}{p^n} = p^{e_{k_n}-n} \cdot \frac{1}{p^{e_{k_n}}} \in N.$$

此时，$M \subseteq N$. 这与N是M的真子模相矛盾.

2) M是Artin模.

$$M \supsetneqq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots N_k \supseteq \cdots.$$

由(1)知，N_i都是有限生成模，它们分别由$\dfrac{1}{p^{e_i}}$生成且

$$e_1 \ge e_2 \ge \cdots \ge e_k \ge \cdots.$$

从而，必有$K \in \mathbb{N}$使得

$$e_K = e_{K+1} = \cdots.$$

此时

$$N_K = N_{K+1} = \cdots.$$

3) M不是Noether模.

若M是Noether模，则它是有限生成模. 不妨设M由

$$\frac{1}{p^{e_1}}, \cdots, \frac{1}{p^{e_n}}$$

生成且

$$e_1 < e_2 < \cdots < e_n.$$

由(1)知M由$\dfrac{1}{p^{e_n}}$生成. 此时

$$\frac{1}{p^{e_n+1}} \notin M.$$

矛盾. □

Remark. 由习题2.11知，$\mathbb{Z}$-模$M := \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$是Artin模，但不是Noether模的原因是$M$不是有限生成的.

习题 2.11.

证明：有限生成Artin模是Noether模.

Proof. 1) $\mathrm{ann}(M)$是Artin环，从而是Noether环.

M是有限生成模，设M的一组生成元为

$$\{m_1, \cdots, m_n\}.$$

考虑R-模同态$f : R \longrightarrow M^n$

$$r \longmapsto (rm_1, \cdots, rm_n).$$

显然

$$\ker f = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{ann}(m_i) = \mathrm{ann}(M).$$

由命题2.20知，M^n也是Artin R-模，其子模

$$R/\mathrm{ann}(M) = R/\ker f \cong \mathrm{im} f \subseteq M^n$$

是Artin R-模.

考虑商环$R/\mathrm{ann}(M)$的理想I. $R/\mathrm{ann}(M)$作为Artin R-模时，I是其子模. 因此，商环$R/\mathrm{ann}(M)$的任意一个理想降链，都可视为Artin R-模$R/\mathrm{ann}(M)$中的子模降链，从而必稳定. 故$R/\mathrm{ann}(M)$ 是Artin环，进而是Noether环.

2) M是Noether模.

M是有限生成R-模，它自然也是有限生成$R/\mathrm{ann}(M)$-模. 这是因为$\mathrm{ann}(M)$中的元素对于数乘作用没有任何的贡献. 而$R/\mathrm{ann}(M)$是Noether环，故M是Noether $R/\mathrm{ann}(M)$-模. 考虑M作为R-模的一条子模升链，它也是M作为Noether $R/\mathrm{ann}(M)$-模的一条子模升链，从而必稳定. 故M也是Noether R-模. □

习题 2.12.

设M是Artin模，$\varphi : M \longrightarrow M$是单同态. 证明：$\varphi$是同构.

Proof. M是Artin模，从而子模降链

$$\mathrm{im}\varphi \supseteq \mathrm{im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{im}\varphi^n \supseteq \cdots$$

稳定. 即：存在$N \in \mathbb{N}$使得

$$\mathrm{im}\varphi^N = \mathrm{im}\varphi^{N+1} = \cdots .$$

$\forall x \in M$

$$\varphi^N(x) \in \mathrm{im}\varphi^N = \mathrm{im}\varphi^{N+1}.$$

从而，存在$y \in M$使得

$$\varphi^N(x) = \varphi^{N+1}(y).$$

由于φ是单射，故φ^N是单射. 于是

$$x = \varphi(y).$$

故φ也是满射. 从而，φ是同构. □

习题 2.13.

设M是Noether R-模，$\varphi : M \longrightarrow M$ R-模满同态. 证明：当n足够大时

$$\ker \varphi^n \cap \mathrm{im}\varphi^n = \{0\}.$$

由此证明：若φ为满射，则φ是同构.

Proof. M是Noether模，从而子模升链

$$\ker\varphi \subseteq \ker\varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker\varphi^n \subseteq \cdots$$

稳定. 即：存在$N \in \mathbb{N}$使得

$$\ker\varphi^N = \ker\varphi^{N+1} = \cdots.$$

$\forall y \in \mathrm{im}\varphi^N$，存在$x \in M$使得

$$y = \varphi^N(x).$$

若$y \in \ker\varphi^N$，则

$$0 = \varphi^N(y) = \varphi^{2N}(x).$$

从而，$x \in \ker\varphi^{2N} = \ker\varphi^N$. 于是

$$y = \varphi^N(x) = 0.$$

此时

$$\ker\varphi^N \cap \mathrm{im}\varphi^N = 0.$$

由于φ是满射，故φ^N也是满射. 从而

$$\ker\varphi = \ker\varphi \cap M = \ker\varphi \cap \mathrm{im}\varphi^n \subseteq \ker\varphi^n \cap \mathrm{im}\varphi^n = 0, \qquad \forall n \geq N.$$

于是，φ也是单射. 从而，φ是同构. □

习题 2.14.

设S是交换环R的乘法集，M是有限生成R-模. 证明：$S^{-1}M = 0$ 当且仅当$sM = 0$对某个$s \in S$成立.

Proof. $\Longrightarrow$) 不妨设M的一组生成元为

$$\{m_1, \cdots, m_n\}.$$

若$S^{-1}M = 0$，则

$$\frac{m_i}{1} = \frac{0}{1}, \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此，存在$s_i \in S$使得

$$s_i(m \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0.$$

故$s_i \in \mathrm{ann}(m_i)$. 从而

$$s := \prod_{i=1}^{n} s_i \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{ann}(m_i) = \mathrm{ann}(M).$$

故$s \in S$且$sM = 0$.

$\Longleftarrow$) 若存在$s_0 \in S$使得$s_0M = 0$. $s_0 = 0$时，显然有$S^{-1}M = 0$. $s_0 \neq 0$时

$$\frac{m}{s} = \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m}{s} \cdot \frac{s_0}{s_0} = \frac{0}{ss_0} = \frac{0}{1}, \qquad \forall \frac{m}{s} \in S^{-1}M.$$

故$S^{-1}M = 0$. □

习题 2.15.

设N与N'是模M的子模. 证明：$N = N'$当且仅当对所有R的素理想$\mathfrak{p}$都有$N_{\mathfrak{p}} = N'_{\mathfrak{p}}$. 将素理想换为极大理想，此结论也成立.

Proof. 令$i : N \cap N' \longrightarrow N$为恒等嵌入. 由于$S^{-1}(\bullet)$是正合函子，故

$$S^{-1}i : (N \cap N')_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}, \quad \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R), \quad S = R - \mathfrak{p}$$

为恒等嵌入. 由命题2.37知

$$(N \cap N')_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}} \cap N'_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}}.$$

故$S^{-1}i$为满射. 由习题2.16知，i为满射. 故

$$N \cap N' = N \Longrightarrow N \subseteq N'.$$

同理可知，$N' \subseteq N$. □

Remark. 若$N \neq N'$，不妨设$N - N' \neq \varnothing$，取$0 \neq x \in N - N'$. 令

$$I_x := \{r \in R : rx \in N'\}.$$

由于$1 \notin I_x$，故I_x是R的真理想. 从而，存在极大理想$\mathfrak{m} \supseteq I_x$. 此时

$$\frac{x}{1} \in N_{\mathfrak{m}} = N'_{\mathfrak{m}}.$$

于是，存在$y \in N'$，$s \in S := R - \mathfrak{m}$使得

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{s}.$$

故存在$s' \in S := R - \mathfrak{m}$使得

$$s'sx = s'y \in N'.$$

此时，$s's \in I_x \subseteq \mathfrak{m}$. 由于$\mathfrak{m}$是极大理想，自然也是素理想. 因此

$$s \in \mathfrak{m}\text{或}s' \in \mathfrak{m}.$$

这就产生了矛盾.

习题 2.16.

设$\varphi : M \longrightarrow N$为$R$-模同态. 证明：$\varphi$是单射或满射当且仅当对$R$的每个素理想或极大理想$\mathfrak{p}$，诱导映射

$$\varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$$

是单射或满射.

Proof. $\Longrightarrow$) 记$S = R - \mathfrak{p}$，则S是R的乘法集. 由于$S^{-1}(\bullet)$是正合函子，故

$$\varphi\text{是单射} \Longrightarrow \varphi_{\mathfrak{p}} := S^{-1}\varphi\text{是单射}, \qquad \varphi\text{是满射} \Longrightarrow \varphi_{\mathfrak{p}} := S^{-1}\varphi\text{是满射}.$$

$\Longleftarrow$) 由于$S^{-1}(\bullet)$是正合函子，对于正合列

$$0 \to \ker\varphi \to M \xrightarrow{\varphi} N \to \operatorname{coker}\varphi \to 0,$$

我们有

$$0 \to K_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \to C_{\mathfrak{p}} \to 0.$$

其中，$K_{\mathfrak{p}} := S^{-1}\ker\varphi$，$C_{\mathfrak{p}} = S^{-1}\operatorname{coker}\varphi$.

若对所有素理想$\mathfrak{p}$都有$\varphi_{\mathfrak{p}}$是单射，则$K_{\mathfrak{p}} = 0$. 由命题2.40知$K := \ker\varphi = 0$，从而φ是单射.

若对所有素理想$\mathfrak{p}$都有$\varphi_{\mathfrak{p}}$是满射，则$C_{\mathfrak{p}} = 0$. 由命题2.40知$C := \operatorname{coker}\varphi = 0$，从而$\varphi$是满射. □

Remark. 1) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$，$\varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$是单射. 取$0 \neq x \in M$，若$\varphi(x) = 0$，那么

$$\varphi_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{x}{1}\Big) = \frac{\varphi(x)}{1} = 0, \qquad \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R).$$

故

$$\frac{0}{1} = \frac{x}{1} \in M_{\mathfrak{p}}, \qquad \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R).$$

令

$$I := \{r \in R : rx = 0\}.$$

由于$1 \notin I$，故I是R的真理想. 于是，存在R的极大理想$\mathfrak{m} \supseteq I$. 由于

$$\frac{0}{1} = \frac{x}{1} \in M_{\mathfrak{m}}.$$

存在$r \in R - \mathfrak{m}$使得$rx = 0$. 故$r \in I \subseteq \mathfrak{m}$. 矛盾.

2) φ是单射. 若

$$\frac{0}{1} = \varphi_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{x}{s}\Big) = \frac{\varphi(x)}{s} \in N_{\mathfrak{p}}.$$

存在$r \in R - \mathfrak{p}$使得

$$0 = r\varphi(x) = \varphi(rx).$$

由φ是单射知，$rx = 0$. 从而

$$\frac{0}{1} = \frac{x}{s} \in M_{\mathfrak{p}}.$$

故$\varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$ 是单射.

3) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$，$\varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$是满射. 若$\varphi : M \longrightarrow N$不是满射. 取$x \in N - \varphi(M)$，令

$$I_x : \{r \in R : rx \in \varphi(M)\}.$$

由于$1 \notin I_x$，故I_x是R的真理想，存在极大理想$\mathfrak{m} \supseteq I_x$. 由于$\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow N_{\mathfrak{m}}$是满射. 存在$\dfrac{m}{s} \in M_{\mathfrak{m}}$使得

$$\frac{x}{1} = \varphi_{\mathfrak{m}}\Big(\frac{m}{s}\Big) = \frac{\varphi(m)}{s} \in N_{\mathfrak{m}}.$$

因此，存在$s' \in S := R - \mathfrak{m}$使得

$$s'\big(\varphi(m) - sx\big) = 0.$$

故

$$s'sx = s'\varphi(m) = \varphi(s'm) \in \varphi(M).$$

因此

$$s's \in I_x \subseteq \mathfrak{m} \Longrightarrow s' \in \mathfrak{m} \text{或} s \in \mathfrak{m}.$$

矛盾.

4) φ是满射. $\forall \dfrac{n}{s} \in N_{\mathfrak{p}}$，存在$m \in M$使得

$$\varphi(m) = n \in N.$$

此时

$$\varphi_{\mathfrak{p}}\Big(\frac{m}{s}\Big) = \frac{\varphi(m)}{s} = \frac{n}{s} \in N_{\mathfrak{p}}.$$

故$\varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$ 是满射.

习题 2.17.

设$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$是$R$上的两个素理想. 证明

$$R_{\mathfrak{p}} \cong (R_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}R\mathfrak{q}} := (R_{\mathfrak{q}} - \mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}})^{-1}R_{\mathfrak{q}}.$$

Proof. 令

$$S := R - \mathfrak{q}, \qquad T := R - \mathfrak{p}.$$

则$S \subseteq T$. 记$T' := S^{-1}T$. $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$，由定理2.35知

$$\mathfrak{p} = \varphi_S^{-1}\big(S^{-1}\mathfrak{p}\big).$$

从而

$$T' = S^{-1}T = S^{-1}(R - \mathfrak{p}) = S^{-1}\big(R - \varphi_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})\big) = S^{-1}R - S^{-1}\mathfrak{p}.$$

上式成立是因为我们把$S^{-1}\mathfrak{p}$的原像去掉再映回来，相当于直接去掉$S^{-1}\mathfrak{p}$. 由于$S^{-1}\mathfrak{p}$是$S^{-1}R$的素理想，故T'是$S^{-1}R$的乘法集.

1) 典范映射φ_S的右消去律.

设$\mu : S^{-1}R \longrightarrow R'$为环同态. 令$\lambda = \mu\varphi_S : R \longrightarrow R'$. $\varphi_S(S)$是$S^{-1}R$ 中的单位，故$\lambda(S) = \mu\varphi_S(S)$是$R'$中的单位. 由$\varphi_S$ 泛性质，存在唯一的$\nu : S^{-1}R \longrightarrow R'$使得

$$\nu\varphi_S = \lambda = \mu\varphi_S.$$

因此，$\nu = \mu$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\lambda=\mu\varphi_S"] \arrow[dr, "\varphi_S"'] & & R' \\
& S^{-1}R \arrow[ur, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

2) 由于

$$\varphi_S(T) \subseteq S^{-1}T = T'.$$

故$\varphi_{T'}\varphi_S(T) \subseteq \varphi_{T'}(T')$ 是$(T')^{-1}(S^{-1}R)$中的单位. 由φ_T的泛性质，存在$f : T^{-1}R \longrightarrow (T')^{-1}(S^{-1}R)$使得

$$f\varphi_T = \varphi_{T'}\varphi_S.$$

又由于$S \subseteq T$，故$\varphi_T(S) \subseteq \varphi_T(T)$是$T^{-1}R$ 中的单位. 由φ_S的泛性质知，存在$h : S^{-1}R \longrightarrow T^{-1}R$使得

$$h\varphi_S = \varphi_T.$$

对于上述h，由定理2.27的证明知

$$h\Big(\frac{t}{s}\Big) = \varphi_T(t)[\varphi(s)]^{-1}, \qquad \forall \frac{t}{s} \in T' = S^{-1}T.$$

由于$S \subseteq T$，$s, t \in T$，故$\varphi_T(t), \varphi_T(s) \in \varphi_T(T)$是$T^{-1}R$中的单位，从而$h(T')$是$T^{-1}R$中的单位. 由$\varphi_{T'}$的泛性质知，存在$g : (T')^{-1}(S^{-1}R) \longrightarrow T^{-1}R$使得

$$g\varphi_{T'} = h.$$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[dr, "\varphi_T"'] & S^{-1}R \arrow[r, "\varphi_{T'}"] \arrow[d, dashed, "h"'] & (T')^{-1}(S^{-1}R) \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& T^{-1}R \arrow[ur, dashed, "g"] &
\end{tikzcd}$$

3) 现在

$$\varphi_{T'}\varphi_S = f\varphi_T = fh\varphi_S = fg\varphi_{T'}\varphi_S.$$

$$\varphi_T = h\varphi_S = g\varphi_{T'}\varphi_S = gf\varphi_T.$$

由(1)知

$$fg = \mathrm{id}_{(T')^{-1}(S^{-1}R)}, \qquad gf = \mathrm{id}_{T^{-1}R}.$$

故

$$T^{-1}R \cong (T')^{-1}S^{-1}R.$$

4) 综上所述

$$R_{\mathfrak{p}} = T^{-1}R \cong (T')^{-1}S^{-1}R = \big(S^{-1}R - S^{-1}\mathfrak{p}\big)(S^{-1}R) = (R_{\mathfrak{q}} - \mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}})^{-1}R_{\mathfrak{q}} = (R_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}}.$$

□

Remark. 1) φ_S虽然不是环的满同态，但它却是环范畴中的满态射.

2) 设R是环，S是R的乘法集，T'是$S^{-1}R$的乘法集. 令$T := \varphi_S^{-1}(T')$. 若$S \subset T$，那么

$$(T')^{-1}(S^{-1}R) \cong T^{-1}R.$$

事实上

$$\varphi_S^{-1}(T') = \varphi_S^{-1}(S^{-1}R - S^{-1}\mathfrak{p}) = R - \mathfrak{p} = T.$$

3) 设R是环，S, T是R的乘法集，则ST也是R的乘法集. 特别地，若$S \subseteq T$，则有$ST = T$. 令

$$T' := S^{-1}T,$$

那么

$$(ST)^{-1}R \cong (T')^{-1}(S^{-1}R).$$

Proof. 令$f : (ST)^{-1}R \longrightarrow (T')^{-1}(S^{-1}R)$.

$$\frac{r}{st} \longmapsto \frac{r/s}{t/1}.$$

我们证明：f是同构.

1) Check：Well-Defined.

若$\dfrac{r}{st} = \dfrac{r'}{s't'} \in (ST)^{-1}R$，存在$s''t'' \in ST$使得

$$s''(t''rs't') = (s''t'')(rs't') = (s''t'')(r'st) = s''(t''r'st).$$

于是

$$\frac{rt't''}{s} = \frac{r'tt''}{s'} \in S^{-1}R.$$

故

$$\frac{t''}{1} \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{t'}{1} = \frac{t''}{1} \cdot \frac{r'}{s'} \cdot \frac{t}{1}.$$

从而
$$\frac{r/s}{t/1}=\frac{r'/s'}{t'/1}\in(T')^{-1}(S^{-1}R).$$

2) Check：f是双射.

$\forall\dfrac{r'/s}{t/s'}\in(T')^{-1}(S^{-1}R)$，令$r=r's'$
$$\frac{r'/s}{t/s'}=\frac{r's'/ss'}{t/s'}=\frac{r's'/s}{t/1}\cdot\frac{1/s'}{1/s'}=\frac{r's'/s}{t/1}=\frac{r/s}{t/1}=f\Big(\frac{r}{st}\Big)\in\mathrm{im}f.$$
故f是满射.

若$\dfrac{r/s}{t/1}=\dfrac{0/1}{1/1}\in(T')^{-1}(S^{-1}R)$. 存在$\dfrac{t'}{s'}\in T'$使得
$$\frac{t'}{s'}\cdot\frac{r}{s}=\frac{0}{1}\in S^{-1}R.$$
于是，存在$s''\in S$使得
$$(s''t')r=0\in R.$$
故
$$\frac{r}{st}=\frac{0}{1}\in(ST)^{-1}R.$$
因此，f是单射.

3) Check：f是环同态.

$\forall\dfrac{r}{st},\dfrac{r'}{s't'}\in(T')^{-1}(S^{-1}R)$
$$f\Big(\frac{r}{st}+\frac{r'}{s't'}\Big)=f\Big(\frac{rs't'+r'st}{sts't'}\Big)=\frac{\frac{rt's'+r'st}{ss'}}{\frac{tt'}{1}}=\frac{\frac{r}{s}\cdot\frac{t'}{1}+\frac{r'}{s'}\cdot\frac{t}{1}}{\frac{t}{1}\cdot\frac{t'}{1}}=\frac{r/s}{t/1}+\frac{r'/s'}{t'/1}=f\Big(\frac{r}{st}\Big)+f\Big(\frac{r'}{s't'}\Big)$$
$$f\Big(\frac{r}{st}\cdot\frac{r'}{s't'}\Big)=f\Big(\frac{rr'}{ss'tt'}\Big)=\frac{\frac{rr'}{ss'}}{\frac{tt'}{1}}=\frac{\frac{r}{s}\cdot\frac{r'}{s'}}{\frac{t}{1}\cdot\frac{t'}{1}}=\frac{r/s}{t/1}\cdot\frac{r'/s'}{t'/1}=f\Big(\frac{r}{st}\Big)\cdot f\Big(\frac{r'}{s't'}\Big).$$
□

习题 2.18.

设S是交换环R的乘法集，M,N为R-模. 证明：存在唯一的$S^{-1}R$-模同构
$$\varphi:(S^{-1}M)\otimes_{S^{-1}R}(S^{-1}N)\cong S^{-1}(M\otimes_R N)$$
使得
$$\varphi\Big(\frac{m}{s}\otimes_{S^{-1}R}\frac{n}{s'}\Big)=\frac{m\otimes_R n}{ss'},\qquad\forall m\in M,\quad n\in N,\qquad\forall s,s\in S.$$

Proof. 1) 存在唯一的$S^{-1}R$-模同构$f:S^{-1}R\otimes_R M\longrightarrow S^{-1}M$使得
$$f\Big(\frac{r}{s}\otimes_R m\Big)=\frac{rm}{s},\qquad\forall\frac{r}{s}\in S^{-1}R,\quad\forall m\in M.$$

令$\varphi:S^{-1}R\times M\longrightarrow S^{-1}M$
$$\Big(\frac{r}{s},m\Big)\longmapsto\frac{rm}{s}.$$

则φ是一个R-双线性映射并且是满射. 记f为φ诱导的张量积映射，则f被唯一确定且

$$f\Big(\frac{r}{s}\otimes_R m\Big)=\frac{rm}{s},\qquad \forall\frac{r}{s}\in S^{-1}R,\quad \forall m\in M.$$

显然，f也是满射. 只需证明它也是单射. 若

$$f\Big(\frac{r}{s}\otimes_R m\Big)=\frac{rm}{s}=\frac{0}{1}.$$

则存在$s'\in S$使得$s'rm=0$. 若$s'=0$，则$S^{-1}R=0$，从而$\frac{r}{s}\otimes_R m=0$. 若$s'\neq 0$，则

$$\frac{r}{s}\otimes_R m=\frac{1}{1}\Big(\frac{r}{s}\otimes_R m\Big)=\frac{s'}{s'}\Big(\frac{r}{s}\otimes_R m\Big)=\frac{s'r}{s's}\otimes_R m=\frac{1}{s's}\otimes_R s'rm=0.$$

因此，f也是单射，从而是同构.

2) 由(1)知

$$\begin{aligned}(S^{-1}M)\otimes_{S^{-1}R}(S^{-1}N)\cong&(S^{-1}R\otimes_R M)\otimes_{S^{-1}R}(S^{-1}R\otimes_R N)\\ \cong&(S^{-1}R\otimes_R M)\otimes_R N\cong S^{-1}R\otimes_R(M\otimes_R N)\\ \cong&S^{-1}(M\otimes_R N).\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}\frac{m}{s}\otimes_{S^{-1}R}\frac{n}{s'}\longmapsto&\Big(\frac{1}{s}\otimes_R m\Big)\otimes_{S^{-1}R}\Big(\frac{1}{s'}\otimes_R n\Big)\\ \longmapsto&\Big(\frac{1}{ss'}\otimes_R m\Big)\otimes_R n\longmapsto\frac{1}{ss'}\otimes_R(m\otimes_R n)\\ \longmapsto&\frac{m\otimes_R n}{ss'}.\end{aligned}$$

唯一确定. □

Remark. 1) 函子$S^{-1}R\otimes_R\bullet$与函子$S^{-1}(\bullet)$同构，由$S^{-1}(\bullet)$是正合函子知，$S^{-1}R$是平坦R-模.

2) 利用张量积和局部化的泛性质.

$$\begin{tikzcd} S^{-1}M\times S^{-1}N \arrow[r] \arrow[d, "(\frac{m}{s},\frac{n}{s'})\mapsto\frac{m\otimes_R n}{ss'}"'] & S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}S^{-1}N \arrow[dl, dashed, "诱导映射f"] \\ S^{-1}(M\otimes_R N) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r] \arrow[d, "(m,n)\mapsto\frac{m}{1}\otimes_{S^{-1}R}\frac{n}{1}"'] & M\otimes_R N \arrow[dl, dashed, "诱导映射g"] \\ S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}S^{-1}N & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M\otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & S^{-1}(M\otimes_R N) \arrow[dl, dashed, "诱导映射h"] \\ S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}S^{-1}N & \end{tikzcd}$$

其中，f,h互为逆映射.

习题 2.19.

设R是整环，$F=\mathrm{Frac}(R)$. 证明：F是有限生成R-模当且仅当$R=F$.

Proof. $\Longrightarrow$) R是F的子环且F是有限生成R-模，由命题2.43知，F在R上整. 又因为F是包含R的最小的域，由定理2.46.(1)知R是域且$F=R$.

$\Longleftarrow$) 显然，$R=F\Longrightarrow F$是秩为1的自由R-模，当然是有限生成R-模. □

习题 2.20.

设$d\neq 0$是无平方因子整数. 试求二次扩域$F:=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 的代数整数环.

Proof. $\forall\alpha=a+b\sqrt{d}\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$，$\alpha'=a-b\sqrt{d}\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. 因此，$\alpha$是方程

$$f(x):=(x-\alpha)(x-\alpha')=x^2-2ax+(a^2-b^2d)$$

的根. 由于F是二次扩域，$\deg\big(f(x)\big)=2$. 因此，$f(x)\in\mathbb{Q}[x]$是α在$\mathbb{Q}$上的最小多项式. 由习题2.25.(1)知，若$\alpha\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 是代数整数，则$f(x)\in\mathbb{Z}[x]$，即

$$2a\in\mathbb{Z},\qquad a^2-b^2d\in\mathbb{Z}.$$

1) $a\in\mathbb{Z}$.

此时，$b^2d\in\mathbb{Z}$. 设$b=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$，$\gcd(m,n)=1$，$n>0$. 那么

$$b^2d=\frac{m^2d}{n^2}\in\mathbb{Z}.$$

由于d无平方因子，故$\gcd(d,n^2)=1$. 从而

$$n\mid m\Longrightarrow n=1\Longrightarrow b\in\mathbb{Z}.$$

2) $2a\in\mathbb{Z}$. 即：$a\in\dfrac{1}{2}+\mathbb{Z}$.

存在奇数$m\in 1+2\mathbb{Z}$使得$a=\dfrac{1}{2}m$. 此时，$4a^2\in\mathbb{Z}$. 故$4b^2d=(2b)^2d\in\mathbb{Z}$且$b^2d\notin\mathbb{Z}$. 由(1)知

$$b^2\notin\mathbb{Z},\qquad 4b^2=(2b)^2\in\mathbb{Z}.$$

从而，$b\in\dfrac{1}{2}+\mathbb{Z}$. 存在奇数$n\in 1+2\mathbb{Z}$使得$b=\dfrac{1}{2}n$. 此时

$$a^2-b^2d\in\mathbb{Z}\Longleftrightarrow(m^2-n^2d)\in 4\mathbb{Z}.$$

由于

$$m^2-n^2d\equiv 1-d\mod 4.$$

故

$$a^2-b^2d\in\mathbb{Z}\Longleftrightarrow d\equiv 1\mod 4.$$

综上所述

$$\mathcal{O}_F=\begin{cases}\mathbb{Z}[\sqrt{d}], & d\equiv 2,3\mod 4,\\ \mathbb{Z}\Big[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{d}}{2}\Big]=\mathbb{Z}\Big[\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{d}}{2}\Big], & d\equiv 1\mod 4.\end{cases}$$

□

习题 2.21.

设R是整闭整环，S是R上的乘法集且$0 \notin S$. 证明：$S^{-1}R$也是整闭整环.

Proof. 由于$0 \notin S$且R是整环，故

$$\mathrm{Frac}(R) = \mathrm{Frac}(S^{-1}R).$$

1) $S^{-1}\overline{R} \subseteq \overline{S^{-1}R}$.

$\forall \dfrac{x}{s} \in S^{-1}\overline{R}$，由于$\overline{R}$在$R$上整，存在$R$上的首一多项式使得

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad x, a_i \in R.$$

故

$$\begin{aligned}\frac{0}{1} =& \frac{1}{s^n}(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)\\ =& \frac{1}{1}\left(\frac{x}{s}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{s}\left(\frac{x}{s}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{s^{n-1}} \cdot \frac{x}{s} + \frac{a_0}{s^n}, \qquad \frac{a_i}{s^{n-i}} \in S^{-1}R.\end{aligned}$$

于是，$S^{-1}\overline{R}$在$S^{-1}R$上整. 因此，$S^{-1}\overline{R} \subseteq \overline{S^{-1}R}$.

2) $S^{-1}\overline{R} \supseteq \overline{S^{-1}R}$.

$\forall x \in \overline{S^{-1}R}$，存在$S^{-1}R$上的首一多项式使得

$$\frac{1}{1}x^n + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{s_1} \cdot x + \frac{a_0}{s_0} = \frac{0}{1}, \qquad \frac{a_i}{s_i} \in S^{-1}R.$$

令$s = \prod\limits_{i=0}^{n-1} s_i \in S$，则上式同乘$s^n$得

$$(sx)^n + \frac{s}{s_{n-1}}a_{n-1}(sx)^{n-1} + \cdots + \frac{s^{n-1}}{s_1}a_1(sx) + \frac{s^n}{s_0}a_0 = 0, \qquad \frac{s^{n-i}}{s_i}a_i \in R.$$

故sx在R上整，从而$sx \in \overline{R}$. 于是，$x \in S^{-1}\overline{R}$. 因此，$S^{-1}\overline{R} \supseteq \overline{S^{-1}R}$.

综上所述

$$S^{-1}R = S^{-1}\overline{R} = \overline{S^{-1}R}.$$

故$S^{-1}R$整闭. □

Remark. 1) 若R'/R是环的整扩张，S是R的乘法集，则$S^{-1}R'$在$S^{-1}R$上整.

Proof. $\forall \dfrac{x'}{s} \in S^{-1}R'$，由于$R'$在$R$上整，存在$R$上的首一多项式使得

$$x'^n + a_{n-1}x'^{n-1} + \cdots + a_1 x' + a_0 = 0, \qquad a_i \in R.$$

故

$$\begin{aligned}\frac{0}{1} =& \frac{1}{s^n}(x'^n + a_{n-1}x'^{n-1} + \cdots + a_1 x' + a_0)\\ =& \frac{1}{1}\left(\frac{x'}{s}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{s}\left(\frac{x'}{s}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{s^{n-1}} \cdot \frac{x'}{s} + \frac{a_0}{s^n}, \qquad \frac{a_i}{s^{n-i}} \in S^{-1}R.\end{aligned}$$

于是，$S^{-1}R'$在$S^{-1}R$上整. □

2) 若R'/R是环的整扩张，I'是R'的理想，则$I := I' \cap R$是R的理想且R'/I'在R/I上整.

Proof. $\forall r' \in R'$，由于R'在R上整，存在$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in R$使得

$$(r')^n + a_{n-1}(r')^{n-1} + \cdots + a_1 r' + a_0 = 0.$$

模I'之后

$$(\overline{r}')^n + \overline{a}_{n-1}(\overline{r}')^{n-1} + \cdots + \overline{a}_1 \overline{r}' + \overline{a}_0 = \overline{0}, \qquad \overline{a}_i \in R/I \cong (R+I')/I'.$$

故R'/I'在R/I上整. □

3) 若R是整环，S是R的乘法集且$0 \notin S$，则$S^{-1}\overline{R} = \overline{S^{-1}R}$. 这说明，局部化和正则化可交换.

习题 2.22.

设S/R是环的整扩张.

1) 若$a \in R$在S中是单位，证明：a也是R中的单位.
2) 证明：
$$\mathrm{Jac}(R) = R \cap \mathrm{Jac}(S).$$

Proof. 1) 显然
$$a \in R \cap S^{\times} \Longrightarrow \forall \mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(S), a \notin \mathfrak{m}'.$$

$\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$，$\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(R)$. 由定理2.46.(2)知，存在$\mathfrak{m}' \in \mathrm{Spec}(S)$使得

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R.$$

由于$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$，故$\mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(S)$. 因此

$$\forall \mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(S), a \notin \mathfrak{m}' \Longrightarrow \forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R), a \notin \mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R.$$

故$a \in R^{\times}$.

2) 只需证明：S中的极大理想和R中的极大理想之间存在双射. 这个双射由S中的理想在R中的限制决定. 记

$$M := \left\{\mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(S) : \mathfrak{m}' \cap R \in \mathrm{Max}(R)\right\}, \qquad N := \left\{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) : \text{存在}\mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(S), \mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R\right\}.$$

显然，$M \subseteq \mathrm{Max}(S)$，$N \subseteq \mathrm{Max}(R)$.

$\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$，由于$S$在$R$上整，由定理2.46(2) 知，存在$S$中的极大理想$\mathfrak{m}'$使得

$$\mathfrak{m} = R \cap \mathfrak{m}'.$$

故$\mathfrak{m} \in N$. 从而，$N = \mathrm{Max}(R)$. 于是

$$\mathrm{Jac}(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)} \mathfrak{m} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in N} \mathfrak{m} = \bigcap_{\mathfrak{m}' \in M} (R \cap \mathfrak{m}') = R \cap \Big(\bigcap_{\mathfrak{m}' \in M} \mathfrak{m}'\Big) \supseteq R \cap \bigcap_{\mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(S)} \mathfrak{m}' = R \cap \mathrm{Jac}(S).$$

另一方面，考虑S中的极大理想$\mathfrak{m}$. 我们证明：$R \cap \mathfrak{m}$是R的极大理想. 从而，$\mathrm{Max}(S) \subseteq M$.

由习题2.21的Remark.(2)知，$S/\mathfrak{m}$在$R/(R\cap\mathfrak{m})$上整. 此时，$S/\mathfrak{m}$是域. 由定理2.46.(1)知，$R/(R\cap\mathfrak{m})$是域. 从而，$R\cap\mathfrak{m}$是R的极大理想. 故$\mathrm{Max}(S)=M$. 此时

$$R\cap \mathrm{Jac}(S)=R\cap\bigcap_{\mathfrak{m}'\in\mathrm{Max}(S)}\mathfrak{m}'=\bigcap_{\mathfrak{m}'\in\mathrm{Max}(S)}(R\cap\mathfrak{m}')=\bigcap_{\mathfrak{m}'\in M}(R\cap\mathfrak{m}')=\bigcap_{\mathfrak{m}\in N}\mathfrak{m}\supseteq\bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)}\mathfrak{m}=\mathrm{Jac}(R).$$

于是

$$\mathrm{Jac}(R)=R\cap\mathrm{Jac}(S).$$

□

Remark. 1) 由于$a\in R$在S中是单位，存在$s\in S$使得$sa=1$. 由于S在R上整，存在R上的首一多项式使得

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0,\qquad a_i\in R.$$

上式两端同乘a^{n-1}得

$$s+a_{n-1}+\cdots+a_1a^{n-2}+a_0a^{n-1}=0.$$

故

$$s=-(a_{n-1}+a_{n-2}a\cdots+a_1a^{n-2}+a_0a^{n-1})\in R.$$

于是，a也是R中的单位.

2) 设R是S的子环，则对于S中的素理想$\mathfrak{p}$，$R\cap\mathfrak{p}$也是R中的素理想. 若S还在R上整，对于S中的极大理想$\mathfrak{m}$，$R\cap\mathfrak{m}$也是R中的极大理想.

习题 2.23.

设S/R是环的整扩张，S是整环. 证明：若R中的非零素理想均是极大理想，则S中非零素理想也是极大理想.

Proof. 由习题2.22.(2)的证明知，对于S中的非零素理想$\mathfrak{p}$，$R\cap\mathfrak{p}$一定是R中的素理想.

若$R\cap\mathfrak{p}\neq 0$，则它是R中的极大理想. 由定理2.46.(2) 知，$\mathfrak{p}$是S中的极大理想.

若$R\cap\mathfrak{p}=0$，我们证明：$\mathfrak{p}=0$.

若不然，$\mathfrak{p}-R\neq\varnothing$. $\forall s\in\mathfrak{p}-R$，由于$s$在$R$上整，存在$a_0,a_1,\cdot,a_{n-1}\in R$使得

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0.$$

故

$$a_0=-(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s)\in\mathfrak{p}\cap R.$$

于是，$a_0=0$. 由于S是整环且$s\neq 0$，故

$$s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1=0.$$

故$a_1=0$. 依次类推，$s=0$. 矛盾.

因此，$\mathfrak{p}-R=\varnothing$. 即：$\mathfrak{p}=0$. 从而，$S$中非零素理想都是极大理想. □

习题 2.24.

设$E/\mathbb{Q}$是Galois扩张，$\alpha\in E$是代数整数. 证明：$\forall\sigma\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$，$\sigma(\alpha)$是代数整数.

Proof. $\sigma(\alpha)$是α的共轭元，它们有相同的极小多项式. 故$\sigma(\alpha)$是代数整数. □

习题 2.25.

设R是整闭整环，F是它的分式域.

1) 若K为F的扩域且$a \in K$. 证明：a在R上整当且仅当a在F上代数且其最小多项式在$R[x]$中.
2) 证明：若$f(x) = a(x)b(x) \in R[x]$且$a(x), b(x) \in F[x]$首一，则$a(x), b(x) \in R[x]$.

Proof. 1) $\Longrightarrow$) 若$a \in K$在R上整，则存在首一多项式$f(x) \in R[x] \subseteq F[x]$使得$f(a) = 0$. 故$a \in K$在$F$上代数. 设$a$在$F$上的极小多项式为$g(x)$，则$g(x) \mid f(x)$. 由于$f(x), g(x)$也首一，存在$h(x) \in F[x]$首一使得

$$h(x)g(x) = f(x) \in R[x].$$

由(2)知，$g(x), h(x) \in R[x]$.

$\Longleftarrow$) 若a在F上代数且其最小多项式$f(x) \in R[x]$，则$f(x)$是R上的首一多项式且$f(a) = 0$. 故$a \in K$在R上整.

2) 设K为$f(x)$在$F[x]$上的分裂域. 在$K[x]$中

$$f(x) = a(x)b(x) = \prod_{i\in I}(x - \xi_i)\prod_{i\in J}(x - \eta_j), \qquad \xi_i, \eta_j \in K, \quad I, J\text{有限}.$$

故ξ_i, η_j在R上整. 由推论2.44.(1)知，K中所有在R上整的元素构成一个环D. 而$f(x) = a(x)b(x)$的系数是ξ_i, η_j做加法和乘法得到的. 因此

$$a(x) = \prod_{i\in I}(x - \xi_i) \in D[x] \cap F[x] = (D \cap F)[x], \qquad b(x) = \prod_{i\in J}(x - \eta_j) \in D[x] \cap F[x] = (D \cap F)[x].$$

由于R在F中整闭，故$D \cap F = R$. 因此，$a(x), b(x) \in R[x]$. □

Remark. 设R'/R是环扩张，$f = gh \in R[x]$且$g, h \in R'[x]$首一. 那么，g, h的系数在R上整.

Proof. 只需找到f的“分裂环”即可.

考虑$R_1 = R'[x]/\big(f(x)\big) \cong R'[\alpha_1]$，$\alpha_1 = x + \big(f(x)\big)$. 显然，$R_1$是$R'$的扩张且

$$f(\alpha_1) = f(x) + \big(f(x)\big) = 0 \in R_1.$$

考虑$R_1[y]/(y - \alpha_1)$. 显然

$$y + (y - \alpha_1) = \alpha_1 + (y - \alpha_1) \in R_1[y]/(y - \alpha_1).$$

而

$$f\big(\alpha_1 + (y - \alpha_1)\big) = f(\alpha_1) + (y - \alpha_1) = 0 \in R_1[y]/(y - \alpha_1).$$

故

$$0 = f\big(y + (y - \alpha_1)\big) = f(y) + (y - \alpha_1) \in R_1[y]/(y - \alpha_1).$$

于是，$f(y) \in (y - \alpha_1)$. 因此，存在$R_1[y]$中的首一多项式$f_1(x)$ 使得

$$f(y) = (y - \alpha_1)f_1(x).$$

依次类推，我们可以得到R'的扩张R^*使得$f(x)$在R^*上可以表示为

$$f(x)=g(x)h(x)=\prod_{i\in I}(x-\alpha_i)\prod_{i\in J}(x-\beta_j),\qquad \alpha_i,\beta_j\in R^*,\quad I,J\text{有限}.$$

显然，α_i,β_j在R上整. 由推论2.44.(1)知，R^*中在R上整的元素构成一个环D. 而$f(x)=g(x)h(x)$的系数是由α_i,β_j做加法和乘法得到的. 因此

$$g(x)=\prod_{i\in I}(x-\alpha_i)\in D[x]\cap R'[x]=(D\cap R')[x],\qquad h(x)=\prod_{i\in J}(x-\beta_j)\in D[x]\cap R'[x]=(D\cap R')[x].$$

因此，$g(x),h(x)\in R'[x]$的系数在R上整. □

习题 2.26.

设I,J是环R的理想. 证明：

1) $\sqrt{IJ}=\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$.
2) $\sqrt{\sqrt{I}}=\sqrt{I}$.
3) $\sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}=\sqrt{I+J}$.

Proof. 1) 显然，$IJ\subseteq I\cap J$，故

$$\sqrt{IJ}\subseteq\sqrt{I\cap J}.$$

$\forall a\in\sqrt{I\cap J}$，存在$k\in\mathbb{N}$使得

$$a^k\in I\cap J.$$

故

$$a^{2k}=a^k\cdot a^k\in IJ.$$

于是，$a\in\sqrt{IJ}$. 从而，$\sqrt{IJ}=\sqrt{I\cap J}$.

显然，$I\cap J\subseteq I,J$. 故$\sqrt{I\cap J}\subseteq\sqrt{I},\sqrt{J}$. 于是

$$\sqrt{I\cap J}\subseteq\sqrt{I}\cap\sqrt{J}.$$

$\forall a\in\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$，存在$m,n\in\mathbb{N}$使得

$$a^m\in I,\qquad a^n\in J.$$

故

$$a^{mn}=(a^m)^n\in I,\qquad a^{mn}=(a^n)^m\in J.$$

从而，$a\in\sqrt{I\cap J}$. 于是，$\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$

2) 显然，$\sqrt{I}\subseteq\sqrt{\sqrt{I}}$. $\forall a\in\sqrt{\sqrt{I}}$，存在$n\in\mathbb{N}$使得

$$a^n\in\sqrt{I}.$$

存在$m\in\mathbb{N}$使得

$$a^{mn}=(a^n)^m\in I.$$

故$a\in\sqrt{I}$. 从而，$\sqrt{\sqrt{I}}=\sqrt{I}$.

3) 显然，$\sqrt{I},\sqrt{J}\subseteq\sqrt{I+J}$. 故$\sqrt{I}+\sqrt{J}\subseteq\sqrt{I+J}$. 从而

$$\sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}\subseteq\sqrt{\sqrt{I+J}}=\sqrt{I+J}.$$

又因为

$$I+J\subseteq\sqrt{I}+\sqrt{J}.$$

故

$$\sqrt{I+J}\subseteq\sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}.$$

于是

$$\sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}=\sqrt{I+J}.$$

□

习题 2.27.

证明：(x^3-y^2)是环$\mathbb{F}_2[x,y]$中的根式理想.

Proof. 设k是域，则$R:=k[x]$是PID，从而也是UFD. 由Gauss引理，$k[x,y]=k[x][y]=R[y]$也是UFD. 令

$$g(y):=y^2-x^3\in R[y].$$

我们证明：$g(y)\in R[y]$不可约. 而UFD中的非零不可约元是素元，故$(x^3-y^2)\subseteq R[y]=k[x,y]$是素理想，自然也是根式理想. 取$k=\mathbb{F}_2$，即得本题结论.

由于$g(y)\in R[y]$是首一多项式且$\deg\big(g(y)\big)=2$. 若$g(y)\in R[y]$可约，则它在R上必分解为两个首一一次因式的乘积，从而在R上有根. 显然，$0\in R$不是$g(y)$的根.

$\forall 0\neq f(x)\in R=k[x]$

$$g(f)=f^2-x^3\neq 0.$$

这是因为，$\deg(f^2)$是偶数. 因此，$g(y)\in R[y]$在R上没有根，从而不可约. □

Remark. 令$\varphi:k[x,y]\longrightarrow k[z^2,z^3]$

$$x\longmapsto z^2,\qquad y\longmapsto z^3.$$

显然，φ是满射. 故

$$k[x,y]/\ker\varphi\cong k[z^2,z^3].$$

显然，$k[z^2,z^3]$是整环. 从而，$\ker\varphi\subseteq k[x,y]$是素理想.

我们证明：$(x^3-y^2)=\ker\varphi$. 从而，$(x^3-y^2)\subseteq k[x,y]$是素理想，自然也是根式理想. 取$k=\mathbb{F}_2$，即得本题结论.

令$R:=k[x]$，$g(y):=y^2-x^3\in R[y]$，则$g(y)$首一且$\deg\big(g(y)\big)=2$. 由习题1.4知，在秩为2的自由R-模$R[y]/\big(g(y)\big)$中

$$\overline{f}=r_1+r_2y+(y^2-x^3)\in R[y]/\big(g(y)\big),\qquad r_1,r_2\in R=k[x],\quad \forall f\in R[y]=k[x,y].$$

显然，$(x^3-y^2)\subseteq\ker\varphi$. 故

$$\overline{\varphi}(\overline{f})=\varphi(r_1+r_2y)=r_1(z^2)+r_2(z^2)z^3\in k[z^2,z^3].$$

其中，$r_1(z^2)\in k[z^2,z^3]$只有偶次项，$r_2(z^2)z^3\in k[z^2,z^3]$ 只有奇次项.

$\forall f\in\ker\varphi$，$\overline{\varphi}(\overline{f})=0$. 于是

$$r_1(z^2)=0=r_2(z^2)\in k[z^2,z^3].$$

此时，$r_1 = 0 = r_2 \in R = k[x]$，故$\overline{f} = \overline{0}$. 从而，$f \in (x^3 - y^2)$. 于是，$\ker\varphi \subseteq (x^3 - y^2)$.

习题 2.28.

设$\mathfrak{p}$为素理想且$I \subseteq \mathfrak{p}$. 证明：$\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p}$.

Proof. $\forall a \in \sqrt{I}$，存在$n \in \mathbb{N}$使得

$$a^n \in I \subseteq \mathfrak{p}.$$

故$a \in \mathfrak{p}$. 从而，$\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p}$. □

Remark.

$$I \subseteq \mathfrak{p} \Longrightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}.$$

习题 2.29.

设R是Noether环，则R中每个真理想I均有极小准素分解

$$I = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$$

且

$$\{\sqrt{Q_1}, \cdots, \sqrt{Q_m}\}$$

由I唯一确定.

Proof. 1) 由命题2.67知，Noether环R中的每个真理想I均有准素分解.

不妨设

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q'_i$$

是I的准素分解. 令$N := \{1, \cdots, n\}$

$$N_1 := \{i \in N : \sqrt{Q'_i} = \sqrt{Q'_1}\}.$$

将$N - N_1$中的元素重新编号并记为N'，其中最小的元素记为$1'$. 令

$$N_2 := \{i' \in N' : \sqrt{Q'_{i'}} = \sqrt{Q'_{1'}}\}.$$

依次类推，我们得到$N_1, N_2, \cdots, N_k$，$k \leq n$.

令

$$Q_i = \bigcap_{j \in N_i} Q'_j, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

由引理2.68知

$$\sqrt{Q_i} = \sqrt{Q'_j}, \qquad \forall j \in N_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

显然，由上述构造方法知

$$\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}, \qquad \forall i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

若存在$1 \leq i_0 \leq k$使得

$$\bigcap_{j \neq i_0} Q_j \subseteq Q_{i_0}.$$

则逐步将这样的i_0剔除. 此时，我们得到I的极小准素分解

$$I = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i, \qquad m \le k.$$

2) 令

$$(I : x) =: \{r \in R : rx \in I\},$$

$$S := \big\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : 存在x \in R, \sqrt{(I : x)} = \mathfrak{p}\big\}.$$

显然，S由I唯一确定. 我们证明：

$$S = \big\{\sqrt{Q_1}, \cdots, \sqrt{Q_m}\big\}.$$

从而，唯一性得证.

$\forall x \in R$

$$(I : x) = \Big(\bigcap_{i=1}^{m} Q_i : x\Big) = \bigcap_{i=1}^{m} (Q_i : x).$$

从而，由习题2.26.(1)和Remark.(1).(3)知

$$\sqrt{(I : x)} = \bigcap_{i=1}^{m} \sqrt{(Q_i : x)} = \bigcap_{x \notin Q_i} \sqrt{(Q_i : x)} = \bigcap_{x \notin Q_i} \sqrt{Q_i}.$$

由于$\sqrt{Q_i}$是素理想，自然也是准素理想. 因此，上式给出了$\sqrt{(I : x)}$的一个准素分解.

$\forall \mathfrak{p} \in S$，存在$x \in R$使得

$$\mathfrak{p} = \sqrt{(I : x)} = \bigcap_{x \notin Q_i} \sqrt{Q_i}.$$

由于$\mathfrak{p}$是素理想，从而是不可约理想，存在某个Q_{i_0}，$1 \le i_0 \le m$使得$x \notin Q_{i_0}$且

$$\mathfrak{p} = \sqrt{Q_{i_0}}.$$

反之，由准素分解的极小性知

$$\bigcap_{j \ne i} Q_j - Q_i \ne \varnothing, \qquad \forall 1 \le i \le m.$$

$\forall 1 \le i \le m$，取$x_i \in \bigcap_{j \ne i} Q_j - Q_i$. 此时

$$\sqrt{(I : x)} = \bigcap_{x \notin Q_l} \sqrt{Q_l} = \sqrt{Q_i}.$$

故

$$\sqrt{Q_i} \in S, \qquad \forall 1 \le i \le m.$$

□

Remark. 设Q是环R的准素理想，$x \in R$.

1) 若$x \in Q$，则$(Q : x) = R$.

2) 若$x \notin \sqrt{Q}$，则$(Q : x) = Q$.

3) 若$x \notin Q$，则$(Q : x)$是准素理想且$\sqrt{(Q : x)} = \sqrt{Q}$.

Proof. 1) 显然，$(Q:x)\subseteq R$.

$\forall r\in R$，$rx\in Q$. 故$r\in(Q:x)$. 从而，$R\subseteq(Q:x)$.

2) 显然，$Q\subseteq(Q:x)$.

若$r\in(Q:x)$，则$rx\in Q$. 若$r\notin Q$，由于Q是R的准素理想，$x\in\sqrt{Q}$. 矛盾. 故$r\in Q$，从而$(Q:x)\subseteq Q$.

3) 显然，$Q\subseteq(Q:x)$.

$\forall r\in(Q:x)$，$rx\in Q$. 由于$x\notin Q$，Q是R的准素理想. 故$r\in\sqrt{Q}$. 从而，$(Q:x)\subseteq\sqrt{Q}$. 此时，由习题2.26.(2) 知

$$\sqrt{Q}\subseteq\sqrt{(Q:x)}\subseteq\sqrt{\sqrt{Q}}=\sqrt{Q}.$$

于是，$\sqrt{(Q:x)}=\sqrt{Q}$.

$\forall y,z\in R$，若$yz\in(Q:x)$，由Q是R的准素理想知

$$xyz\in Q,z\notin(Q:x)\Longrightarrow xyz\in Q,xz\notin Q\Longrightarrow y\in\sqrt{Q}=\sqrt{(Q:x)}.$$

故$(Q:x)$是准素理想. □

Noether环的条件只是保证了极小素分解的存在性. 事实上，极小素分解只要存在，它必定唯一. 这一点与Noether环的条件无关.

习题 2.30.

证明：对任意域k，$\mathbb{A}_k^1$中的仿射代数集为$\mathbb{A}_k^1$，$\varnothing$和$\mathbb{A}_k^1$的有限子集.

Proof. $\forall S\subseteq k[x]$，由于$k[x]$为PID，存在$f\in k[x]$使得

$$(f)=(S).$$

$\forall f\in k$

$$\mathcal{Z}(f)=\begin{cases}\mathbb{A}_k^1, & f=0,\\ \varnothing, & f\neq 0.\end{cases}$$

是$\mathbb{A}_k^1$中的仿射代数集.

$\forall f\in k[x]-k$，$\deg f=n\geq 1$，f在k上至多有n个根. 故

$$\mathcal{Z}(S)=\mathcal{Z}(f)$$

为有限集. □

习题 2.31.

若$k=\mathbb{F}_2$，$V=\{(0,0),(1,1)\}\subseteq\mathbb{A}_k^2$. 证明：$\mathcal{I}(V)=\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$. 其中

$$\mathfrak{m}_1=(x,y),\qquad \mathfrak{m}_2=(x-1,y-1)$$

是$k[x,y]$的极大理想.

Proof. 记$p_1=(0,0)$，$p_2=(1,1)$. 显然

$$f(p_1)=0,\qquad \forall f\in\mathfrak{m}_1.$$

故$\mathfrak{m}_1\subseteq\mathcal{I}(p_1)$. 但$\mathfrak{m}_1$是$k[x,y]$的极大理想且$\mathcal{I}(p_1)\neq k[x,y]$. 故$\mathcal{I}(p_1)=\mathfrak{m}_1$. 同理，$\mathcal{I}(p_2)=\mathfrak{m}_2$. 又因为

$$\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2=k[x,y].$$

故$\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2$互素，从而

$$\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{m}_2=\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2.$$

由命题2.77.(3)知

$$\mathcal{I}(V)=\mathcal{I}\big(\{p_1\}\cup\{p_2\}\big)=\mathcal{I}(p_1)\cap\mathcal{I}(p_2)=\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{m}_2=\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2.$$

□

习题 2.32.

设V是$\mathbb{A}_k^n$中的有限仿射代数集. 证明：若V中的元素个数为m，则$k[V]$作为k-代数同构于k^m.

Proof. 设$V=\{p_1,\cdots,p_m\}\subseteq\mathbb{A}_k^n$是一个具有$m$个元素的仿射代数集. 其中

$$p_i=\big(a_1^{(i)},\cdots,a_n^{(i)}\big),\qquad a_j^{(i)}\in k,\quad 1\le i\le m,\quad 1\le j\le n.$$

那么，与习题2.31类似

$$\mathfrak{m}_i:=\mathcal{I}(p_i)=(x_1-a_1^{(i)},\cdots,x_n-a_n^{(i)}),\qquad 1\le i\le m$$

是$k[x_1,\cdots,x_n]$的极大理想且它们互素. 于是

$$\mathcal{I}(V)=\bigcap_{i=1}^m\mathfrak{m}_i=\prod_{i=1}^m\mathfrak{m}_i.$$

显然，满同态$\varphi_i:k[x_1,\cdots,x_n]\longrightarrow k$

$$f\longmapsto f(p_i)$$

诱导同构

$$k[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{m}_i=k[x_1,\cdots,x_n]/\ker\varphi_i\cong k.$$

由环上的中国剩余定理

$$k[V]\cong k[x_1,\cdots,x_n]/\mathcal{I}(V)\cong\prod_{i=1}^m k[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{m}_i\cong k^m.$$

显然，上述每个环中都至少包含k，故上述环同构也是k-线性映射，从而是k-模同构. 于是，$k[V]$作为k-代数同构于k^m. □

习题 2.33.

设k是有限域. 证明：$\mathbb{A}_k^n$的任意子集均是仿射代数集.

Proof. 显然，空集和单点集是仿射代数集. $\mathbb{A}_k^n$的任意非空子集都是有限集，从而是单点集的有限并. 仿射代数集的有限并自然也是仿射代数集. □

习题 2.34.

设f是域k上的一元多项式，$\deg(f)\geq 1$. 证明：$\mathcal{I}\big(\mathcal{Z}(f)\big)=(f)$当且仅当$f\in k[x]$是不同线性因子的乘积.

Proof. 设$f\in k[x]$在k上的根为$x_1,\cdots,x_n$，则$V:=\mathcal{Z}(f)=\{x_1,\cdots,x_n\}$是$\mathbb{A}_k^1$中的仿射代数集. 显然

$$\mathfrak{m}_i:=\mathcal{I}(x_i)=(x-x_i),\qquad 1\leq i\leq n$$

是$k[x]$中的极大理想且它们互素. 故

$$\mathcal{I}\big(\mathcal{Z}(f)\big)=\mathcal{I}(V)=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{m}_i=\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{m}_i.$$

因此

$$\mathcal{I}\big(\mathcal{Z}(f)\big)=(f)\iff(f)=\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{m}_i=\big((x-x_1)\cdots(x-x_n)\big)\iff f=c\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),\qquad 0\neq c\in k.$$

□

习题 2.35.

设$f,g\in k[x,y]$为不可约多项式且互不关联. 证明：$\mathcal{Z}(f,g)$或者是空集，或者是$\mathbb{A}_k^2$中的有限集.

Proof. 由于$f,g\in k[x,y]$不可约且互不关联，故$f,g\notin k$. 特别地，$k[x,y]$ 是UFD，从而f,g还是$k[x,y]$中的素元. 不妨设x在f中的次数不为零，即$f\notin k[y]\subseteq k(y)$. 令

$$R:=k(y)=\mathrm{Frac}(k[y]).$$

那么，f作为$(k[y])[x]$上的本原多项式在$R[x]$中依然不可约且$\deg(f)\geq 1$. 由于R是域，故$R[x]$是PID. 从而，(f)是$R[x]$的极大理想. 若$g\in(f)$，则存在非零多项式$h_1,h_2\in k[y]$使得

$$\frac{h_1}{h_2}f=g.$$

从而

$$h_1f=h_2g\in k[x,y].$$

这与$f,g\in k[x,y]$互不关联矛盾. 故$g\notin(f)$且

$$(g)+(f)=R[x].$$

因此，存在非零多项式$\widetilde{u},\widetilde{v}\in R[x]$使得

$$\widetilde{u}f+\widetilde{v}g=1.$$

取$\widetilde{u},\widetilde{v}$的系数在$R$中的公分母$0\neq a\in k[y]$. 则

$$uf+vg=a\in k[y].$$

其中

$$u=a\widetilde{u}\in k[x,y],\qquad v=a\widetilde{v}\in k[x,y].$$

于是

$$(x,y)\in\mathcal{Z}(f,g)\Longrightarrow y\in\mathcal{Z}(a).$$

由于$0\neq a\in k[y]$，故a的根至多有限. 不妨设$a\in k[y]$的根为

$$y_1,\cdots,y_n.$$

此时，由于$f\in k[x,y]$不可约，$(y-y_i)\nmid f$，故$0\neq f(x,y_i)\in k[x]$. 于是

$$f(x,y_i)=0,\qquad 1\leq i\leq n$$

的根至多有限. 不妨设$f(x,y_i)\in k[x]$的根为

$$x_1^{(i)},\cdots,x_{m_i}^{(i)},\qquad 1\leq i\leq n.$$

那么

$$\mathcal{Z}(f,g)\subseteq\big\{(x_j^{(i)},y_i):1\leq j\leq m_i,1\leq i\leq n\big\}$$

至多有限.

显然，$f(x,y)=x,g(x,y)=x-1$满足题目要求. 此时，$\mathcal{Z}(f,g)=\varnothing$. □

Remark. 事实上，证明过程中我们并没有用到g不可约的性质. 因此，只需要求f不可约且$f\nmid g$，命题即可成立.

习题 2.36.

设$V\subseteq\mathbb{A}_k^n$是仿射代数集，$f\in k[V]$. f的图是指集合

$$\big\{\big(a_1,\cdots,a_n,f(a_1,\cdots,a_n)\big):(a_1,\cdots,a_n)\in V\big\}.$$

证明：f的图是$\mathbb{A}_k^{n+1}$上的仿射代数集.

Proof. 记f的图为$G(V)$. 令$u\in k[x_1,\cdots,x_n][x_{n+1}]$

$$u(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})=x_{n+1}-f(x_1,\cdots,x_n).$$

由习题2.37和命题2.76.(3)知

$$\mathcal{Z}(u)\cap(V\times\mathbb{A}_k^1)=\{(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}):(x_1,\cdots,x_n)\in V,x_{n+1}=f(x_1,\cdots,x_n)\}=G(V)$$

是$\mathbb{A}_k^{n+1}$中的仿射代数集. □

习题 2.37.

设$V\subseteq\mathbb{A}_k^m,W\subseteq\mathbb{A}_k^n$是仿射代数集. 证明：$V\times W\subseteq\mathbb{A}_k^{m+n}$也是仿射代数集且

$$k[V\times W]\cong k[V]\otimes_k k[W].$$

其中，$\bullet\otimes_k\bullet$为k-代数之间的张量积.

Proof. 为简单起见，记

$$k[x_1,\cdots,x_m]:=k[X],\qquad k[y_1,\cdots,y_n]:=k[Y].$$

1) $\mathcal{I}(V),\mathcal{I}(W)$作为$k[X],k[Y]$的理想是$k[X,Y]$的子集. 在$\mathbb{A}_k^{m+n}$中

$$\mathcal{Z}\big(\mathcal{I}(V)\cup\mathcal{I}(W)\big)=\mathcal{Z}\big(\mathcal{I}(V)\big)\cap\mathcal{Z}\big(\mathcal{I}(W)\big)=(V\times\mathbb{A}_k^n)\cap(\mathbb{A}_k^m\times W)=V\times W$$

是仿射代数集.

2) 不妨设$V,W\neq\varnothing$. 令$\varphi:k[X]/\mathcal{I}(V)\otimes_k k[Y]/\mathcal{I}(W)\longrightarrow k[X,Y]/\mathcal{I}(V\times W)$.

$$\sum_{i,j}f_i|_V\otimes_k g_j|_W\longmapsto\sum_{i,j}(f_ig_j)|_{V\times W}=\sum_{i,j}f_i|_Vg_j|_W.$$

为简单起见，在不至于引起混淆的情况下，我们省略限制符号，将$f|_V$简记为f.

显然，$k[X],k[Y]$是k-线性空间. 设e_i,d_j分别是$k[X],k[Y]$的一组基，那么$e_i\otimes d_j$是$k[X]\otimes_k k[Y]$的一组基.

$$f|_V\otimes_k g|_W=\sum_{i,j}r_{ij}(e_i|_V\otimes_k d_j|_W)=0\Longrightarrow r_{ij}=0.$$

从而

$$\varphi(f|_V\otimes_k g|_W)=\sum_{i,j}r_{ij}(e_id_j)|_{V\times W}=0.$$

故

$$\varphi(0)=0,\qquad\varphi(1)=1.$$

$\forall r,r'\in k$

$$\varphi\big(r(f\otimes_k g)+r'(f'\otimes_k g')\big)=\varphi(rf\otimes_k g+r'f'\otimes_k g')=rfg+r'f'g'=r\varphi(f\otimes_k g)+r'\varphi(f'\otimes_k g').$$

故φ是k-线性映射.

由k-代数的张量积之间的乘法知

$$\varphi\big((f\otimes_k g)(f'\otimes_k g')\big)=\varphi(ff'\otimes_k gg')=ff'gg'=fgf'g'=\varphi(f\otimes_k g)\varphi(f'\otimes_k g').$$

故φ是定义良好的环同态，也是k-模同态.

$\forall x_i|_{V\times W},y_j|_{V\times W}\in k[X,Y]/\mathcal{I}(V\times W)$

$$\varphi(x_i|_V\otimes_k 1)=x_i|_V\cdot 1|_W=x_i|_{V\times W},\qquad\varphi(1\otimes_k y_j|_W)=1|_V\cdot y_j|_W=y_j|_{V\times W}.$$

由φ是环同态知，φ是满射.

$\forall h|_{V\times W}\in k[X,Y]/\mathcal{I}(V\times W)$，由于$\varphi$是满射，存在$r_{ij}\in k$使得

$$h|_{V\times W}=\varphi\Big(\sum_{i,j}r_{ij}(e_i|_V\otimes_k d_j|_W)\Big)=\sum_{i,j}r_{ij}e_i|_Vd_j|_W.$$

故

$$h|_{V\times W}=0\Longrightarrow\sum_{i,j}r_{ij}e_i|_Vd_j|_W=0\Longrightarrow\sum_j\Big(\sum_i\big(r_{ij}e_i(p)\big)d_j|_W=0\Longrightarrow\sum_i r_{ij}e_i|_V=0\Longrightarrow r_{ij}=0.$$

故φ是单射.

综上所述

$$k[V]\otimes_k k[W]\cong k[X]/\mathcal{I}(V)\otimes_k k[Y]/\mathcal{I}(W)\cong k[X,Y]/\mathcal{I}(V\times W)\cong k[V\times W]$$

是k-代数同构. □

Remark. 1) 事实上

$$k[V]\otimes_k k[W]\cong k[X]/\mathcal{I}(V)\otimes_k k[Y]/\mathcal{I}(W)\cong\frac{k[X]\otimes_k k[Y]}{\mathcal{I}(V)\otimes_k k[Y]+k[X]\otimes_k\mathcal{I}(W)}\cong k[X,Y]/\mathcal{I}(V\times W)\cong k[V\times W].$$

2) 若V,W是不可约的仿射代数集，则$V\times W$也是不可约的仿射代数集.

设

$$V\times W=Z_1\cup Z_2\subseteq\mathbb{A}_k^{m+n}.$$

其中，$Z_1,Z_2\subseteq\mathbb{A}_k^{m+n}$是仿射代数集. 我们证明：$V\times W=Z_1$或者$V\times W=Z_2$.

令

$$V_i:=\{v\in V:v\times W\subseteq Z_i\}\subseteq\mathbb{A}_k^{m+n},\qquad i=1,2.$$

设

$$I_i:=\mathcal{I}(Z_i)=(f_1^{(i)},\cdots,f_{n_i}^{(i)})\subseteq k[X,Y],\qquad i=1,2.$$

则

$$S_i:=\left\{f_j^{(i)}(q)\in k[X]:q\in W,1\leq j\leq n_i\right\}\subseteq k[X],\qquad i=1,2.$$

于是

$$V_i=\mathcal{Z}(S_i)\subseteq\mathbb{A}_k^m,\qquad i=1,2$$

是仿射代数集.

显然，$V_1\cup V_2\subseteq V$. $\forall v_0\in V$，令

$$W_i=(v_0\times W)\cap Z_i\subseteq\mathbb{A}_k^{m+n},\qquad i=1,2.$$

则W_1,W_2是仿射代数集. 此时

$$v_0\times W=\big((v_0\times W)\cap Z_1\big)\cup\big((v_0\times W)\cap Z_2\big)=W_1\cup W_2\subseteq\mathbb{A}_k^{m+n}.$$

我们证明：必有$v_0\times W=W_1\subseteq Z_1$或$v_0\times W=W_2\subseteq Z_2$. 从而，$v_0\in V_1$或$v_0\in V_2$. 故$V\subseteq V_1\cup V_2$.

考虑典范投射$\pi_m:\mathbb{A}_k^{m+n}\longrightarrow\mathbb{A}_k^m$，$\pi_n:\mathbb{A}_k^{m+n}\longrightarrow\mathbb{A}_k^n$. 那么

$$v_0=\pi_m(v_0\times W)=\pi_m(W_1\cup W_2)=\pi_m(W_1)\cup\pi_m(W_2)\subseteq\mathbb{A}_k^m.$$

是不可约的仿射代数集.

若$\pi_m(W_i)=\varnothing$，则$W_i\subseteq\pi_m(W_i)\times\pi_n(W_i)=\varnothing$. 故$\pi_m(W_1),\pi_m(W_2)$至少有一个不是空集.

若$\pi_m(W_1)=\varnothing$，则$W_1=\varnothing$，从而$v_0\times W=W_2\subseteq Z_2$.

若$\pi_m(W_2)=\varnothing$，则$W_2=\varnothing$，从而$v_0\times W=W_1\subseteq Z_1$.

若$W_1,W_2\neq\varnothing$，则$\pi_m(W_1)=\pi_m(W_2)=v_0$. 从而

$$W_1=v_0\times\pi_n(W_1),\qquad W_2=v_0\times\pi_n(W_2).$$

但

$$W=\pi_n(W_1)\cup\pi_n(W_2)\subseteq\mathbb{A}_k^n$$

是不可约的仿射代数集. 故$W=\pi_n(W_1)$或$W=\pi_n(W_2)$. 从而，$v_0\times W=W_1\subseteq Z_1$或$v_0\times W=W_2\subseteq Z_2$.

现在

$$V=V_1\cup V_2\subseteq\mathbb{A}_k^m$$

是不可约的仿射代数集. 故$V=V_1$或$V=V_2$. 根据V_1,V_2的定义，此时有

$$V\times W\subseteq Z_1\text{或}V\times W\subseteq Z_2.$$

显然，$Z_1,Z_2\subseteq V\times W$. 于是

$$V\times W=Z_1\text{或}V\times W=Z_2.$$

3) k-代数的张量积是k-代数范畴的上积.

设M,N是k-代数，$i:M\longrightarrow M\otimes_k N$，$j:N\longrightarrow M\otimes_k N$

$$m\longmapsto m\otimes_k 1,\qquad n\longmapsto 1\otimes_k n.$$

是k-代数同态.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "i"] & \\
X & & M\otimes_k N \arrow[ll, dashed, "\sigma"'] \\
 & N \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

$\forall f:M\longrightarrow X$，$\forall g:N\longrightarrow X$. $\varphi:M\times N\longrightarrow X$

$$(m,n)\longmapsto f(m)\cdot g(n)$$

既是一个k-双线性映射，又是一个环同态. 因此，φ诱导了唯一的k-代数同态$\sigma:M\otimes_k N\longrightarrow X$

$$m\otimes_k n\longmapsto f(m)\cdot g(n)$$

使得上图交换.

4) 由k-代数与代数簇的对偶关系知，k-代数簇的Descartes积是k-代数簇范畴的积.

5) $\dim(V\times W)=\dim V+\dim W$.

习题 2.38.

证明：有限生成$\mathbb{Z}$-代数k如果是域，则k一定是有限域.

Proof. 1) k是域，R是有限生成k-代数. 若R是域，则R/k是域的有限扩张.

由Noether正则化引理，R在某个k上的多元多项式环$P:=k[t_1,\cdots,t_s]$上整. 由于R是域，P也是域. 从而，$s=0$. 于是，R在k上整. 故R/k 是域的代数扩张. 因此，R/k是域的有限生成代数扩张，自然也是域的有限扩张.

2) R是有限生成S-代数，S是有限生成T-代数，则R是有限生成T-代数.

设R在S上的一组生成元为$r_1,\cdots,r_m$，S在T上的一组生成元为$s_1,\cdots,s_n$. 那么

$$r_is_j,\qquad 1\le i\le m,\quad 1\le j\le n$$

是R在T上的一组生成元.

3) $R\subseteq R'\subseteq R''$是环扩张. 若$R$是Noether环，$R''$既是有限生成$R$-代数，又是有限生成$R'$-模. 那么，$R'$也是有限生成$R$-代数.

设$x_1,\cdots,x_m$是R''作为R-代数的生成元，$y_1,\cdots,y_n$是R'' 作为R'-模的生成元. 存在$z_{ij},z_{rst}\in R'$使得

$$x_i=\sum_{j=1}^n z_{ij}y_j,\qquad y_ry_s=\sum_{t=1}^n z_{rst}y_t,\qquad 1\le i\le m,\quad 1\le j,r,s,t\le n.$$

设R_0'是由z_{ij},z_{rst}生成的R-代数，则R_0'是Noether环R上的有限生成代数. 由Hilbert基定理，R_0'是Noether环. 显然，$R_0'\subseteq R'$.

$\forall x\in R''$，x可以表示为$x_1,\cdots,x_m$的系数在R中的多项式. 因此，由x_i,y_ry_s的表达式知，x也可以表示为$y_1,\cdots,y_n$ 的系数在R_0'中的线性组合. 故R''是有限生成R_0'-模，从而是Noether R_0'-模. 因此，R'作为R''的R_0'-子模也是Noether模，从而是有限生成R_0'-模，自然也是有限生成R_0'-代数.

现在，R'是有限生成R_0'-代数，R_0'是有限生成R-代数. 由(2)知，R'是有限生成R-代数.

4) k为特征零域. 此时，k有一个素子域与$\mathbb{Q}$同构.

若k是有限生成$\mathbb{Z}$-代数，则k自然也是有限生成$\mathbb{Q}$-代数. 由(1)知，$k/\mathbb{Q}$是域的有限扩张. 故k是有限维$\mathbb{Q}$-线性空间. 由(3)知，$\mathbb{Q}$是有限生成$\mathbb{Z}$-代数.

不妨设

$$\frac{p_1}{q_1},\cdots,\frac{p_n}{q_n}$$

是$\mathbb{Q}$在$\mathbb{Z}$上的一组生成元. 其中，$p_i,q_i\in\mathbb{Z}$，$q_i>0$，$\gcd(p_i,q_i)=1$，$1\le i\le n$. 由于$\mathbb{Z}$中的素数有无穷多个，存在素数q使得

$$q>\max(q_1,\cdots,q_n).$$

此时，$\dfrac{1}{q}\in\mathbb{Q}$且$q_1,\cdots,q_n$都不以$q$为素因子. 故$\dfrac{1}{q}\in\mathbb{Q}$不能被

$$\frac{p_1}{q_1},\cdots,\frac{p_n}{q_n}$$

生成. 这就产生了矛盾.

5) k为特征p域. 此时，k有一个素子域同构于$\mathbb{F}_p$.

设环同态$\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow k$使得$k$成为有限生成$\mathbb{Z}$-代数. 显然，$k$也是$\mathrm{im}\varphi$上的有限生成代数. 由于$k$ 为特征p域，故

$$\mathrm{im}\varphi\cong\mathbb{Z}/\ker\varphi=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\cong\mathbb{F}_p.$$

因此，k在$\mathbb{F}_p$上有限生成. 由(1)知，$k/\mathbb{F}_p$是域的有限扩张. 故k是有限维$\mathbb{F}_p$-线性空间. 因此，$|k|=p^n$. 故k是有限域. □

Remark. S是有限生成R-代数，不一定是有限生成R-模. 若S在R上整，则S是有限生成R-代数等价于S是有限生成R-模. 整性提供了有限生成代数何时是有限生成模的一种判据.

习题 2.39.

1) 分别写出$k[x,y]$中以字典序和次数-字典序的前十个首一单项式.
2) 以字典序和次数-字典序写出$k[x,y,z]$中所有权小于等于2的单项式.

Proof. 1) $1,y,y^2,\cdots,y^9$.

2) $1,y,x,y^2,xy,x^2,y^3,xy^2,x^2y,x^3$. □

Remark. 这说明，字典序和次数-字典序确实是不同的偏序关系.

习题 2.40.

使用次数-字典序求

1) $x \mod [x-y, x-z]$与$x \mod [x-z, x-y]$.
2) $x^7y^2+x^3y^2-y+1 \mod [xy^2-x, x-y^3]$和$x^7y^2+x^3y^2-y+1 \mod [x-y^3, xy^2-x]$.

Proof. 1)

$$x \equiv y \mod [x-y, x-z], \qquad x \equiv z \mod [x-z, x-y].$$

2)

$$x^7y^2+x^3y^2-y+1 \equiv x^7+x^3y^2-y+1 \mod [xy^2-x, x-y^3],$$

$$x^7y^2+x^3y^2-y+1 \equiv x^7+x^3y^2-y+1 \mod [x-y^3, xy^2-x].$$

□

Remark. 这说明，带余除法的余式与做除法的次序有关.

习题 2.41.

设$c_\alpha X^\alpha$是非零单项式，$f(X), g(X) \in k[X]$且它们的每一项都不被$c_\alpha X^\alpha$整除. 证明：$f(X)-g(X)$的每一项都不被$c_\alpha X^\alpha$整除.

Proof. 不妨设$c_\beta(f)-c_\beta(g) \neq 0$且

$$c_\alpha X^\alpha \mid c_\beta(f)X^\beta - c_\beta(g)X^\beta = \big(c_\beta(f)-c_\beta(g)\big)X^\beta.$$

那么，对于

$$\alpha = (a_1, \cdots, a_n), \qquad \beta = (b_1, \cdots, b_n).$$

我们有

$$a_i \leq b_i, \qquad \forall 1 \leq i \leq n.$$

若$c_\beta(f)=0$，则$c_\beta(g) \neq 0$且$c_\alpha X^\alpha \mid c_\beta(g)X^\beta$. 矛盾.

若$c_\beta(g)=0$，则$c_\beta(f) \neq 0$且$c_\alpha X^\alpha \mid c_\beta(f)X^\beta$. 矛盾.

若$c_\beta(f), c_\beta(g) \neq 0$，则$c_\alpha X^\alpha \mid c_\beta(f)X^\beta, c_\beta(g)X^\beta$. 矛盾.

于是，$f(X)-g(X)$的每一项都不被$c_\alpha X^\alpha$整除. □

习题 2.42.

设I是$k[X]$中的单项式理想，即I由单项式$X^{\alpha(1)}, \cdots, X^{\alpha(q)}$生成. 证明：

1) $f(x) \in I \iff f$的每一项均被某个$X^{\alpha(i)}$生成.
2) 若$r \neq 0$模$G=[g_1, \cdots, g_m]$约化，则$r \notin [\mathrm{LT}(g_1), \cdots, \mathrm{LT}(g_m)]$.

Proof. 1) $\Longrightarrow$) 若f有一项$c_\beta X^\beta \neq 0$不能由$X^{\alpha(i)}$，$i=1,\cdots,q$生成，则

$$X^{\alpha(i)} \nmid c_\beta X^\beta, \qquad i=1,\cdots,q.$$

因此，由带余除法的算法知

$$f \neq 0 \mod [X^{\alpha(1)},\cdots,X^{\alpha(q)}].$$

这与$f\in I$矛盾.

$\Longleftarrow$) 不妨设f的第i项被某个$X^{\alpha(i(j))}$生成，$1\le i(j)\le q$，存在$g_j(X)\in k[X]$使得

$$f(X)=\sum_j^n g_j(X)X^{\alpha(j(i))}\in I.$$

2) 由于$r\neq 0$模$G=[g_1,\cdots,g_m]$约化，故$\mathrm{LT}(r)$不能由某个$\mathrm{LT}(g_i)$，$1\le i\le m$生成. 由(1)知

$$r\notin[\mathrm{LT}(g_1),\cdots,\mathrm{LT}(g_m)].$$

□

习题 2.43.

给定$k[X]$中一个单项式序. 设I是$k[X]$的理想，$g_1,\cdots,g_m\in I$. 若对任意非零$f\in I$，存在g_i使得$\mathrm{LT(g_i)}\mid \mathrm{LT}(f)$. 证明：$I=(g_1,\cdots,g_m)$.

Proof. $\forall f\in I$

$$f \mod [g_1,\cdots,g_m]=0.$$

故

$$I=(g_1,\cdots,g_m).$$

□

Remark. 这说明，在Gröbner基的定义中，不需要假设I 由$g_1,\cdots,g_m$生成.

习题 2.44. 2.45. 2.46.

1) 使用次数-字典序求$I=(x^2-y,y^2-x,x^2y^2-xy)$的Gröbner基，并判断$x^4+x+1$是否在$I$中.
2) 使用次数-字典序求$I=(xz,xy-z,yz-x)$的Gröbner基，并判断x^3+x+1 是否在I中.
3) 若$x<y<z$，在字典序下，$y-x^2,z-x^3$是$I=(y-x^2,z-x^3)$的Gröbner基.
4) 若$y<z<x$，在字典序下，$y-x^2,z-x^3$不是$I=(y-x^2,z-x^3)$的Gröbner基.

Proof. 1)

$$I=(x^2-y,y^2-x,x^2y^2-xy).$$

$$x^4+x+1\equiv 2x+1 \mod [x^2-y,y^2-x,x^2y^2-xy].$$

$$x^4+x+1\notin I=(x^2-y,y^2-x,x^2y^2-xy).$$

2)

$$I=(xz,xy-z,yz-x,x^2,z^2).$$

$$x^3+x+1\equiv x+1 \mod [xz,xy-z,yz-x,x^2,z^2].$$

3)
$$S(y-x^2,z-x^3)=-zx^2+yx^3\equiv 0 \mod [y-x^2,z-x^3].$$

4)
$$S(y-x^2,z-x^3)=xy-z\neq 0 \mod [y-x^2,z-x^3].$$

□

Cayley-Hamilton Theorem & Nakayama Lemma.

M是有限生成R-模，$\varphi\in\mathrm{End}(M)$. 若$\varphi$是满射，则$\varphi$是同构.

Proof. 令$P:=R[x]$，则$\mu:P\longrightarrow \mathrm{End}(M)$
$$x\longmapsto\varphi$$
是环同态. 于是，M在数乘
$$f(x)m=f(\varphi)(m)$$
下是P-模. 令$I=(x)$. 由于φ是满射，故$IM=M$. 由Nakayama引理，存在$r\in I$使得
$$(1+r)M=0.$$
显然，$r\in I$可以表示为
$$r=xg(x).$$
因此
$$\mathrm{id}_M+\varphi g(\varphi)=0.$$
令$\psi:=-g(\varphi)$，则
$$\varphi\psi=\mathrm{id}_M,\qquad \psi\varphi=\mathrm{id}_M.$$
于是，φ是同构. □

Remark. (*Cayley-Hamilton*). 设$A:=(a_{ij})\in M_n(R)$，A的特征多项式为
$$p_A(x):=\det(xE-A)=x^n+a_1x^{m-1}+\cdots+a_n.$$
设a_{ij}生成的理想为I，则$a_k\in I^k$，$k=1,\cdots,n$，并且$p_A(A)=0$.

(*Determinant Trick*). M是由$m_1,\cdots,m_n$生成的R-模，$\varphi\in\mathrm{End}(M)$. 记
$$\varphi(m_i)=:\sum_{j=1}^n a_{ij}m_j$$
的矩阵为$A:=(a_{ij})$，则$p_A(\varphi)=0$.

(*Nakayama Lemma*). M是有限生成R-模，I是R的理想. $IM=M$当且仅当存在$r\in I$使得$(1+r)M=0$. 若I是R的Jacobson根，则$1+r$可逆，故$M=0$.

1) 显然，Cayley-Hamilton定理与Determinant Trick等价.

2) Nakayama引理导出了本题结论，这说明有限生成模的自同态与线性空间的自同态有着相似的性质. 即：满同态一定也是单同态. 在线性空间中，这一性质是由维数公式导出的. 即
$$\dim V=\dim\ker\varphi+\dim\mathrm{im}\varphi.$$

R是局部环，M是有限生成R-模，则M投射当且仅当M自由.

Proof. 有限生成自由R-模显然是有限生成投射R-模.

1) 设$\mathfrak{m}$是局部环R的唯一极大理想. 若$r \in R$且$r \notin \mathfrak{m}$，则r是单位.

若$(r) \neq R$，则(r)是真理想，从而有极大理想包含(r). 但局部环R的极大理想只有$\mathfrak{m}$，故$r \in \mathfrak{m}$. 这就产生了矛盾. 因此，$(r) = R$. 从而，$r \in R$是单位.

2) M是由$m_1, \cdots, m_n$生成的R-模且$m_1, \cdots, m_n$的任意真子集都不是生成元，F是以$x_1, \cdots, x_n$为基的自由R-模. 那么，满同态$\varphi : F \longrightarrow M$

$$x_i \longmapsto m_i, \qquad \forall 1 \leq i \leq n$$

满足$\ker \varphi \subseteq \mathfrak{m}F$.

考虑正合列

$$0 \to \ker \varphi \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\varphi} M \to 0.$$

若$\ker \varphi$不在$\mathfrak{m}F$中，则存在$y = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i \in \ker \varphi - \mathfrak{m}F$. 于是，某个$r_i \notin \mathfrak{m}$. 不妨设为$r_1 \notin \mathfrak{m}$. 由(1)知，$r_1$是单位. 故

$$0 = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \Longrightarrow m_1 = -r_1^{-1} \sum_{j=2}^{n} r_j x_j.$$

这与生成元$m_1, \cdots, m_n$的极小性矛盾.

3) M是有限生成投射R-模，则(2)中的正合列分裂且

$$F = M' \oplus \ker \varphi \cong M \oplus \ker \varphi.$$

其中，$M' \cong M$是F的子模. 于是，由$\mathfrak{m} \ker \varphi \subseteq \ker \varphi \subseteq \mathfrak{m}F$知

$$\mathfrak{m}F = \mathfrak{m} \ker \varphi \oplus \mathfrak{m}M' \Longrightarrow \ker \varphi = \mathfrak{m} \ker \varphi \oplus (\ker \varphi \cap \mathfrak{m}M').$$

但$\ker \varphi \cap \mathfrak{m}M' \subseteq \ker \varphi \cap M' = 0$. 故$\ker \varphi = \mathfrak{m} \ker \varphi$. 显然，$\ker \varphi$是有限生成$R$-模且$\mathfrak{m}$是局部环$R$的Jacobson根. 由Nakayama引理，$\ker \varphi = 0$. 故$M \cong F$是自由$R$-模. □

Remark. 若环R-上的任意可数生成投射模都自由，则任意投射R-模都自由. Kaplansky证明了：局部环R上的可数生成投射模都自由. ***Projective Modules***. Annals Math. 1958. 372-377. 于是，命题中的有限生成条件可以去掉.

M是有限表现R-模，则M平坦当且仅当M投射.

Proof. 证明需要用到特征模. □

Remark. 若R是Noether环，则有限生成R-模与有限表现R-模等价.

Artin环的素理想都是极大理想，且只有有限多个极大理想.

Proof. 1) Artin整环必为域.

$\forall 0 \neq x \in R$，考虑理想降链

$$(x) \supseteq (x^2) \supseteq \cdots \supseteq (x^n) \supseteq \cdots.$$

由于R是Aritin环，存在$N \in \mathbb{N}$使得$(x^N) = (x^{N+1})$. 于是，存在$r \in R$使得

$$rx^{N+1} = x^N.$$

由于R是整环且$x \neq 0$，故$rx = 1$. 从而，R中的非零元素都是单位. 于是，R是域.

2) 对于R中的素理想$\mathfrak{p}$，$R/\mathfrak{p}$是Artin整环. 于是，$R/\mathfrak{p}$是域. 从而，$\mathfrak{p}$是极大理想.

3) 考虑集合

$$\Sigma := \{\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r : r \geq 1, \mathfrak{m}_i \in \mathrm{Max}(R)\}.$$

由于R是Artin环且Σ非空，存在极小元$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n \in \mathrm{Max}(R)$. 于是

$$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m} \cap (\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n) \subseteq \mathfrak{m}, \qquad \forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R).$$

由素理想的性质知，$\mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{m}$对某个$1 \leq i \leq n$成立. 由于它们都是极大理想，故$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$. 因此，Artin环的极大理想只有有限个. □

S是环R的乘法集，M, N是R-模. 那么，存在典范同态

$$\sigma : S^{-1}\mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

若M有限生成，则σ是单射. 若M有限表现，则σ是同构.

Proof. 1) R与R'是环，M是R-模，N是(R, R')-双模，P是R'-模. 那么，存在典范同态

$$\theta : \mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_{R'} P \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_{R'} P).$$

若P平坦，M有限生成，则θ是单射. 若P平坦，M有限表现，则θ是同构.

2) 设R是环，R'是R-代数，M, N是R-模. 那么，存在典范同态

$$\varphi : \mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R R' \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', N \otimes_R R').$$

若P平坦，M有限生成，则θ是单射. 若P平坦，M有限表现，则θ是同构.

在(1)中令$R' := R$，$P := R'$. 由习题1.32的Remark.(3)知

$$\mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', N \otimes_R R') \cong \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R R').$$

3) 在(2)中令$R' = S^{-1}R$，则R'是平坦R-模且$S^{-1}R \otimes_R P \cong S^{-1}P$. □

S是环R的乘法集，那么

1) M是自由R-模则$S^{-1}M$是自由$S^{-1}R$-模.
2) M是投射R-模则$S^{-1}M$是投射$S^{-1}R$-模.
3) M是平坦R-模则$S^{-1}M$是平坦$S^{-1}R$-模.
4) R为Noether-环且M是内射R-模则$S^{-1}M$是内射$S^{-1}R$-模.
5) M是有限生成R-模则$S^{-1}M$是有限生成$S^{-1}R$-模.

Proof. 1) 加性函子$S^{-1}(\bullet) : \mathcal{R}\text{-mod} \longrightarrow S^{-1}\mathcal{R}\text{-mod}$.

S是环R的乘法集，$\alpha : M \longrightarrow N$是$R$-模同态. 那么，$\varphi_S\alpha(M) = S^{-1}N$. 由局部化的泛性质，存在$S^{-1}R$-模同态$S^{-1}\alpha : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$

$$\frac{m}{s} \longmapsto \frac{\alpha(m)}{s}$$

使得下图交换

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[d, "\alpha"'] & S^{-1}M \arrow[d, dashed, "S^{-1}\alpha"] \\ N \arrow[r, "\varphi_S"'] & S^{-1}N \end{tikzcd}$$

于是，我们得到函子$S^{-1}(\bullet)$诱导的R-模同态

$$S^{-1}:\mathrm{Hom}_R(M,N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M,S^{-1}N).$$

并且由局部化的泛性质知

$$S^{-1}(\beta\alpha)=(S^{-1}\beta)(S^{-1}\alpha),\qquad \forall\beta\in\mathrm{Hom}_R(N,P).$$

显然，S^{-R}-模都是R-模. 将$S^{-1}R$模的数乘限制在R上的映射也是一个加性函子. 由于N是$S^{-1}R$-模当且仅当$N=S^{-1}N$. 此时，$\varphi_S=\mathrm{id}_N$. 因此，(1) 中的同态变为

$$\mathrm{Hom}_R(M,S^{-1}N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M,N).$$

其逆映射为

$$(S^{-1}\alpha:S^{-1}M\longrightarrow S^{-1}N=N)\longmapsto(S^{-1}\alpha=\varphi_S\alpha=\alpha:M\longrightarrow N=S^{-1}N).$$

因此，函子$S^{-}(\bullet)$是数乘限制函子的左伴随函子. 因此，函子$S^{-}(\bullet)$保持正向极限，直和与cokernel.

2) 若$M\cong\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda$，则

$$S^{-1}M\cong S^{-1}\Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda\Big)\cong\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}S^{-1}R_\lambda$$

是自由$S^{-1}R$-模.

若M是投射R-模，则存在R-模K使得$M\oplus K$是自由R-模. 于是

$$S^{-1}(M\oplus K)\cong S^{-1}M\oplus S^{-1}K$$

是自由$S^{-1}R$-模. 故$S^{-1}M$是投射$S^{-1}R$-模.

对于$S^{-1}R$-模正合列

$$0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0.$$

将数乘限制在R上得到R-模正合列

$$0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0.$$

由于M是平坦R-模，故

$$0\longrightarrow M\otimes_R A\longrightarrow M\otimes_R B\longrightarrow M\otimes_R C\longrightarrow 0$$

正合. 由于$S^{-1}R(\bullet)$是正合函子且

$$S^{-1}(M\otimes_R A)\cong S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}S^{-1}A\cong S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}A.$$

故

$$0\longrightarrow S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}A\longrightarrow S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}B\longrightarrow S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}C\longrightarrow 0$$

正合. 于是，$S^{-1}M$是平坦$S^{-1}R$-模.

3) 由Baer判别法，只需证明，对任意$S^{-1}R$的理想I以及$f: I \longrightarrow S^{-1}M$，$f$都可以延拓为

$$\widetilde{\varphi}: S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}M.$$

即：嵌入映射$i: I \longrightarrow S^{-1}R$诱导的

$$i^*: \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R, S^{-1}M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(I, S^{-1}M)$$

是满射. 由于R是Noether环，故$S^{-1}R$是Noether环. 不妨设I的一组生成元为

$$\frac{r_1}{s_1}, \cdots, \frac{r_n}{s_n}.$$

那么，$J = (r_1, \cdots, r_n)$作为R中的理想满足

$$I = S^{-1}J.$$

并且，嵌入映射i限制在J上也是J到R的嵌入. 于是，对于有限表现R- 模J, R，存在典范同构σ使得下图交换

$$\begin{CD}
\mathrm{Hom}_R(R, M) @>{i^*}>> \mathrm{Hom}_R(J, M)\\
@V{S^{-1}}VV @VV{S^{-1}}V\\
S^{-1}\mathrm{Hom}_R(R, M) @>{S^{-1}i^*}>> S^{-1}\mathrm{Hom}_R(J, M)\\
@V{\sigma}VV @VV{\sigma}V\\
\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R, S^{-1}M) @>{S^{-1}i^*}>> \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}J, S^{-1}M)
\end{CD}$$

由于M是内射模，由Baer判别法知，i^*是满射. 由函子$S^{-1}(\bullet)$ 的正合性以及σ是同构知，$S^{-1}i^*$是满射. 因此，由Baer判别法知，$S^{-1}M$是内射$S^{-1}R$-模.

4) 若M是有限生成R-模，其生成元为$m_1, \cdots, m_n$. 那么

$$\frac{m_1}{1}, \cdots, \frac{m_n}{1}$$

是$S^{-1}M$作为$S^{-1}R$-模的一组生成元. □

1) 若对R中任意的素(极大)理想$\mathfrak{p}$，$M_{\mathfrak{p}}$是平坦$S^{-1}R$模，则M是平坦R-模.
2) R是Noether环，M是有限生成R-模. 若对R中任意的素(极大)理想$\mathfrak{p}$，$M_{\mathfrak{p}}$是投射$S^{-1}R$模，则M是投射R- 模.
3) R是Noether环. 若对R中任意的素(极大)理想$\mathfrak{p}$，$M_{\mathfrak{p}}$是内射$S^{-1}R$模，则M是内射R- 模.
4) R是整环. 若对R中任意的素(极大)理想$\mathfrak{p}$，$M_{\mathfrak{p}}$是无扭$S^{-1}R$模，则M是无扭R-模.

Proof. 1) 对于R-模正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

由函子$S^{-1}(\bullet)$的正合性，我们得到$S^{-1}R$-模正合列

$$0 \longrightarrow A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow C_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

令$K := \ker(M \otimes_R A \to M \otimes_R B)$，则

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R B \longrightarrow M \otimes_R C \longrightarrow 0$$

是R-模正合列. 由函子$S^{-1}(\bullet)$的正合性，我们得到$S^{-1}R$-模正合序列

$$0 \longrightarrow K_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \otimes_{S^{-1}R} A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \otimes_{S^{-1}R} B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \otimes_{S^{-1}R} C_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

但$M_{\mathfrak{p}}$是平坦$S^{-1}R$-模，故$K_{\mathfrak{p}} = 0$. 于是，$K = 0$. 从而，M是平坦R-模.

2) 对于R-模正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

由函子$S^{-1}(\bullet)$的正合性，我们得到$S^{-1}R$-模正合列

$$0 \longrightarrow A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow C_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

令$C := \operatorname{coker}\big(\operatorname{Hom}_R(M, B) \to \operatorname{Hom}_R(M, C)\big)$，则

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, C) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

是R-模正合列. 由于M有限表现且$S^{-1}(\bullet)$是正合函子，我们得到$S^{-1}R$-模正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(M_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(M_{\mathfrak{p}}, B_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(M_{\mathfrak{p}}, C_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow C_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

由于$M_{\mathfrak{p}}$是投射$S^{-1}R$模，故$C_{\mathfrak{p}} = 0$. 因此，$C = 0$. 故M是投射R-模.

3) 由Baer判别法，只需证明：嵌入映射$i : I \longrightarrow R$诱导的同态

$$i^* : \operatorname{Hom}_R(R, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(I, M)$$

是满射. 设$C := \operatorname{coker} i^*$，则有$R$-模正合列

$$\operatorname{Hom}_R(R, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(I, M) \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

由于R是Noether环，I, R是有限表现R-模. 由函子$S^{-1}(\bullet)$的正合性，我们得到$S^{-1}R$-模正合列

$$\operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R, M_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}I, M_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow C_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

由于$M_{\mathfrak{p}}$是内射$S^{-1}R$-模，由Baer判别法知，$C_{\mathfrak{p}} = 0$. 于是，$C = 0$. 从而，M是内射R-模.

4) $(M_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{tor}} = (M_{\mathrm{tor}})_{\mathfrak{p}}$.

$\forall \dfrac{m}{s} \in (M_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{tor}}$，存在$\dfrac{r'}{s'} \in S^{-1}R$使得

$$\frac{r'}{s'}\frac{m}{s} = \frac{0}{1}.$$

于是，存在$s'' \in S$使得

$$s''r'm = 0.$$

故$m \in M_{\mathrm{tor}}$. 于是，$\dfrac{m}{s} \in (M_{\mathrm{tor}})_{\mathfrak{p}}$.

$\forall \dfrac{m}{s} \in (M_{\mathrm{tor}})_{\mathfrak{p}}$，$m \in M_{\mathrm{tor}}$. 存在$r' \in R$使得$r'm = 0$. 于是

$$\frac{r'}{s'}\frac{m}{s} = \frac{0}{1}.$$

故$\dfrac{m}{s} \in (M_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{tor}}$.

5) 若R是整环，则M_{tor}是M 的子模. 对于R- 模正合列

$$0 \longrightarrow M_{\mathrm{tor}} \longrightarrow M \longrightarrow M/M_{\mathrm{tor}} \longrightarrow 0.$$

由函子$S^{-1}(\bullet)$的正合性，我们得到$S^{-1}R$-模正合列

$$0 \longrightarrow (M_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{tor}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}}/(M_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{tor}} \longrightarrow 0.$$

由于$M_{\mathfrak{p}}$是无扭$S^{-1}R$-模，故

$$(M_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{tor}} = (M_{\mathrm{tor}})_{\mathfrak{p}} = 0.$$

于是，$M_{\mathrm{tor}} = 0$. 故M是无扭R-模. □

S为R乘法集，I为R中与S不相交的理想构成的集合中的极大元，则I 为素理想.

Proof. 若I不是素理想，则存在$a, b \in R$，$a, b \notin I$但$ab \in I$. 于是

$$I \subsetneqq I + (a), \qquad I \subsetneqq I + (b).$$

由I的极大性知

$$\big(I + (a)\big) \cap S \neq \varnothing, \qquad \big(I + (b)\big) \cap S \neq \varnothing.$$

于是，存在$r, r' \in R$，$i, i' \in I$使得

$$s := i + ra \in S, \qquad s' := i' + r'b \in S.$$

此时

$$ss' = ii' + ir'b + rai' + rr'ab \in S \cap I.$$

这与$S \cap I = \varnothing$矛盾. □

R是非零环，Σ是R的一切不含0的乘法集的集合. 由Zorn引理，Σ有极大元S. 那么，S是Σ的极大元当且仅当$R - S$是极小素理想.

Proof. 1) 显然，$\{1\} \in \Sigma$. 故Σ非空. 在包含关系下，Σ构成一个非空偏序集. 设$\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$\Sigma$中的一条链，则

$$0 \notin \overline{S} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda.$$

$\forall x, y \in \overline{S}$，存在某个$S_\lambda$使得$x, y \in S_\lambda$. 由于$S_\lambda \in \Sigma$是乘法集，故$x, y \in S_\lambda \subseteq \overline{S}$. 于是，$\overline{S} \in \Sigma$也是乘法集. 显然，$\overline{S}$是链$\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的上界. 于是，由Zorn引理，$\Sigma$含有极大元$S$.

2) 若S是不包含0的极大乘法集，$a \notin S$当且仅当存在$s \in S$以及$n \in \mathbb{N}$使得$sa^n = 0$. $\forall a, b \in R - S$，存在$s, s' \in S$以及$m, n \in \mathbb{N}$ 使得$sa^n = 0 = s'b^m$. 故$ss'(a-b)^{m+n} = 0$. 从而，$a - b \in R - S$. 故$R - S$关于加法构成一个群. $\forall c \in R$，显然有$s(ca)^n = c^n(sa^n) = 0$. 于是，$ca \in R - S$. 从而，$I := R - S$是R的一个理想. 由于S是乘法集，故

$$xy \in S, \qquad \forall x, y \in S = R - I.$$

于是，I是R的素理想. 若I不是极小的，则存在素理想$I' \subsetneqq I$ 且$S = R - I \subsetneqq R - I' := S' \in \Sigma$是不包含0的乘法集. 这与$S$是不包含0的极大乘法集矛盾.

反过来，若I是极小素理想，则$S := R - I$是不包含0的乘法集. 若S不极大，则存在极大的不包含0的乘法集S'使得$S \subsetneqq S'$. 此时，$I' = R - S'$ 是素理想且$I' \subsetneqq I$. 这与I是极小素理想矛盾. □

Remark. $\mathfrak{p}$为环R的极小素理想当且仅当对任意的$a \in \mathfrak{p}$存在$r \notin \mathfrak{p}$以及$n \in \mathbb{N}$使得$ra^n = 0$.

R中全体零因子组成的集合D是一些与$S := R - D$不相交的素理想的并，故S 是一个乘法集.

Proof. 显然，$1 \in S$，故$S \neq \varnothing$. 由于D是全体零因子组成的集合，故

$$xy \in S \iff x \in S, y \in S.$$

$\forall a \in D$，$\forall r \in R$，由于$a \notin S$，故$ra \notin S$. 因此，$(a) \cap S = \varnothing$. 令Σ_a为所有与S不相交且包含a 的理想所构成的集合，则Σ_a在包含关系下构成一个非空偏序集. 设$\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$是$\Sigma_a$中的一条链，则$a \in \overline{I} := \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \in \Sigma_a$是与$S$不相交的理想，从而是$\Sigma_a$的一个上界. 由Zorn引理，$\Sigma_a$有极大元$I_a$. 易知，$I_a$是$R$的素理想. 故$D$中的任意一个元素都包含在某个与$S$不相交的素理想中. 于是，$D$含在这些素理想的并中. 但是，这些素理想与$S$都不相交，故它们的并也与$S$不相交，从而含在$D$中. 故$D$是这些素理想的并. □

Remark. 若环R的乘法集S满足

$$xy \in S \iff x, y \in S,$$

则称S是饱和的.

1) S是饱和的当且仅当$R - S$是一些与S不相交的素理想的并.

2) 对于R的乘法集S，存在包含S的最小饱和乘法集$\overline{S}$，称为S的饱和化. 显然，$\overline{S}$是所有与S不相交的素理想的并集的补集.

3) 若$S = 1 + I$，则与S相交的素理想$\mathfrak{p}$满足：存在$x \in \mathfrak{p}$以及$r \in I$使得$x = 1 + r$. 故$\mathfrak{p} + I = R$. 即：$\mathfrak{p}$与I互素. 于是，$R - \overline{S}$是所有与I不互素的素理想的并. 由于$\mathfrak{p} + I \neq R$，存在极大理想$\mathfrak{m}$包含$\mathfrak{p} + I$. 又因为包含I的极大理想都是与I不互素的素理想. 因此，所有与I不互素的素理想的并就是所有包含I的极大理想的并. 故

$$\overline{S} = R - \bigcup \left\{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) : I \subseteq \mathfrak{m}\right\}.$$

Chapter 3. Representation Theory.

F是域，G是有限群，A是有限维含幺F-代数，所有的模都是有限生成模.

习题 3.1.

设A是n维F-代数. 证明：A可以嵌入矩阵代数$M_n(F)$成为其子代数.

Proof. 由于A是n维F-代数，作为F-模，A是n维F-线性空间. 因此，存在一组基$a_1, \cdots, a_n \in A$使得

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} F a_i.$$

由于$a_i a_j \in A$，从而是$a_1, \cdots, a_n \in A$的F-线性组合. 于是，存在$M_i \in M_n(F)$使得

$$a_i(a_1, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, a_n) M_i.$$

令$\varphi : A \longrightarrow M_n(F)$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i a_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f_i M_i, \qquad f_i \in F.$$

那么，φ是满足要求的嵌入.

若$\sum\limits_{i=1}^{n} f_i M_i = 0$，则

$$a_j \sum_{i=1}^{n} f_i a_i = 0, \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, n.$$

故$A \sum\limits_{i=1}^{n} f_i a_i = 0$. 从而，$\sum\limits_{i=1}^{n} f_i a_i = 0$. 于是，$\varphi$是单射.

显然，φ是F-线性映射. 由于$a_1, \cdots, a_n \in A$是A的一组基，容易看出，M_i还是线性无关的. 因此

$$\mathrm{im}\varphi = \mathrm{span}(M_1, \cdots, M_n).$$

为验证φ保持乘法，由分配律知，只需验证$M := \varphi(a_i a_j) = \varphi(a_i)\varphi(a_j) = M_i M_j$. 即

$$a_i a_j (a_1, \cdots, a_n) = a_i (a_1, \cdots, a_n) M_j = (a_1, \cdots, a_n) M_i M_j.$$

由φ的定义知，这是显然的. □

Remark. $\mathbb{C}$是二维$\mathbb{R}$-代数. $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$$a + b\mathrm{i} \longmapsto a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

是满足要求的嵌入. 这种嵌入并不唯一. 显然

$$a + b\mathrm{i} \longmapsto a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

也是满足要求的嵌入，它是第一种嵌入的共轭.

类似地，可以研究Hamilton四元数在$M_4(\mathbb{R})$或$M_2(\mathbb{C})$中的嵌入.

$$a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}\longmapsto\begin{pmatrix}a&-b&d&-c\\b&a&-c&-d\\-d&c&a&-b\\c&d&b&a\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a-d\mathrm{i}&-b+c\mathrm{i}\\b+c\mathrm{i}&a+d\mathrm{i}\end{pmatrix},\qquad\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

同样，矩阵的转置是四元数的共轭.

计算

$$\det\begin{pmatrix}a&-b&d&-c\\b&a&-c&-d\\-d&c&a&-b\\c&d&b&a\end{pmatrix}.$$

由于

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)E\longrightarrow(a^2+b^2+c^2+d^2)=h\overline{h}\longrightarrow\begin{pmatrix}a&-b&d&-c\\b&a&-c&-d\\-d&c&a&-b\\c&d&b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-b&d&-c\\b&a&-c&-d\\-d&c&a&-b\\c&d&b&a\end{pmatrix}^T.$$

于是，行列式的平方为$(h\overline{h})^4$. 检验符号知，行列式为$(h\overline{h})^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

习题 3.2.

设U,V是$F[G]$-模，它们的F-维数均为n. 取U,V的基，则它们对应的表示即可视为群同态

$$\rho:G\longrightarrow\mathrm{GL}_n(F),\qquad\tau:G\longrightarrow\mathrm{GL}_n(F).$$

证明：作为$F[G]$-模$U\cong V$当且仅当存在$M\in\mathrm{GL}_n(F)$使得$\tau(g)=M\rho(g)M^{-1}$.

Proof. 由习题3.3即得此结论. □

习题 3.3.

设G为有限群，F为域. 设(V_1,ρ_1)与(V_2,ρ_2)是G的有限维表示. 那么，下列条件等价：

1) V_1与V_2作为有限生成$F[G]$-模同构.
2) 存在可逆F-线性变换$\varphi:V_1\longrightarrow V_2$使得$\rho_2(g)=\varphi\rho_1(g)\varphi^{-1}$.
3) 存在可逆F-线性变换$\varphi:V_1\longrightarrow V_2$使得$g\varphi(v)=\varphi(gv)$.

Proof. 1) $\Longrightarrow$ 3) 若$\varphi:V_1\longrightarrow V_2$是$F[G]$-模同构，由$F\subseteq F[G]$知，$\varphi$是$F$-同构，从而是可逆线性变换. 由$\varphi$的$F[G]$-线性知，对于$g\in G$

$$\varphi(gv)=g\varphi(v),\qquad\forall g\in G.$$

3) $\Longrightarrow$ 2) 由于G对于V_1,V_2的群作用由ρ_1,ρ_2决定. 故

$$\varphi\rho_1(g)\varphi^{-1}\varphi(v)=\varphi(gv)=g\varphi(v)=\rho_2(g)\varphi(v).$$

故

$$\rho_2(g)=\varphi\rho_1(g)\varphi^{-1},\qquad\forall g\in G.$$

2) $\Longrightarrow$ 1) 显然，$\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$可逆且是$F[G]$-模同态.

$$\varphi(gv) = \varphi\rho_1(g)(v) = \rho_2(g)\varphi(v) = g\varphi(v).$$

□

Remark. 满足以上条件之一的两个表示称为是同构的.

习题 3.4.

对于正则表示$F[G]$，令

$$N := \Big\{\lambda \sum_{g\in G} g : \lambda \in F\Big\}, \qquad I := \Big\{\sum_{g\in G} n_g g : n_g \in F, \sum_{g\in G} n_g = 0\Big\}.$$

证明：

1) N是$F[G]$作为$F[G]$-模的子模且$N \cong F$. 若$F[G]$的子模M同构于F，则$M = N$.
2) I是$F[G]$的子模且$F[G]/I \cong F$. 若$F[G]$的子模M满足$F[G]/M \cong F$，则$M = I$.
3) 若$\mathrm{char} F \mid |G|$，则$N \subseteq I$. 故I不是$F[G]$的直和项.

Proof. 1) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$

$$\Big(\lambda_1 \sum_{g\in G} g\Big) - \Big(\lambda_1 \sum_{g\in G} g\Big) = (\lambda_1 - \lambda_2) \sum_{g\in G} g \in N.$$

于是，N是一个加法Abel群.

$\forall \sum\limits_{h\in G} n_h h \in F[G]$

$$\Big(\sum_{h\in G} n_h h\Big)\Big(\lambda \sum_{g\in G} g\Big) = \sum_{h\in G} \Big(n_h \lambda \sum_{g\in G} hg\Big) \in N.$$

于是，N是$F[G]$的理想，从而是$F[G]$的$F[G]$-子模.

令$f : N \longrightarrow F$

$$\lambda \sum_{g\in G} g \longmapsto \lambda.$$

显然，f是满射. 又因为G是$F[G]$的一组基，故

$$\lambda \sum_{g\in G} g = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0.$$

于是，f是双射.

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$

$$f\bigg(\Big(\lambda_1 \sum_{g\in G} g\Big) + \Big(\lambda_2 \sum_{g\in G} g\Big)\bigg) = f\Big((\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{g\in G} g\Big) = \lambda_1 + \lambda_2 = f\Big(\lambda_1 \sum_{g\in G} g\Big) + f\Big(\lambda_2 \sum_{g\in G} g\Big).$$

$\forall \sum\limits_{h\in G} n_h h \in F[G]$

$$f\bigg(\Big(\sum_{h\in G} n_h h\Big)\Big(\lambda \sum_{g\in G} g\Big)\bigg) = f\Big(\sum_{h\in G} n_h \lambda \sum_{g\in G} hg\Big) = \sum_{h\in G} n_h \lambda = \Big(\sum_{h\in G} n_h g\Big) f\Big(\lambda \sum_{g\in G} g\Big).$$

其中，F作为$F[G]$-模配备了平凡的群作用. 即

$$gx \longmapsto x, \qquad \forall g \in G, \quad \forall x \in F.$$

于是，f是$F[G]$-模同构. 故$N \cong F$.

若作为$F[G]$-模，$M \cong F$，由$F \subseteq F[G]$知，作为F-线性空间，它们也同构. 于是，M是以某个$m \in M$为基的一维F-线性空间. 由于$m \in F[G]$，故

$$M = \Big\{\lambda m = \lambda \sum_{g \in G} n_g g : \lambda \in F\Big\}.$$

作为$F[G]$-子模，M还是环$F[G]$的理想，故

$$\lambda \sum_{g \in G} n_{h^{-1}g} g = \lambda \sum_{g \in G} n_g hg = hm \in M, \qquad \forall h \in G.$$

由于G是$F[G]$的一组基，因此对应系数相等

$$n_g = n_{h^{-1}g}, \qquad \forall g, h \in G.$$

此即

$$n_g = n_h, \qquad \forall g, h \in G.$$

故

$$m = n_0 \sum_{g \in G} g.$$

于是，$M = N$.

2) $\forall \sum\limits_{g \in G} m_g g, \sum\limits_{g \in G} n_g g \in I$，由于

$$\sum_{g \in G} (m_g - n_g) = \Big(\sum_{g \in G} m_g\Big) - \Big(\sum_{g \in G} n_g\Big) = 0.$$

故

$$\Big(\sum_{g \in G} m_g g\Big) - \Big(\sum_{g \in G} n_g g\Big) = \sum_{g \in G} (m_g - n_g) g \in I.$$

于是，I是一个加法Abel群.

$\forall \sum\limits_{h \in G} m_h h \in F[G]$，$\forall \sum\limits_{g \in G} n_g g \in I$，由于

$$\sum_{g \in G} m_h n_g = m_h \sum_{g \in G} n_g = 0.$$

故

$$\Big(\sum_{h \in G} m_h h\Big)\Big(\sum_{g \in G} n_g g\Big) = \sum_{h \in G} \Big(\sum_{g \in G} m_h n_g hg\Big) \in I.$$

于是，I是$F[G]$的理想，从而是$F[G]$的$F[G]$-子模.

令$\varphi : F[G] \longrightarrow F$

$$\sum_{g \in G} n_g g \longmapsto \sum_{g \in G} n_g.$$

显然，φ是满射.

$\forall \sum\limits_{g\in G} m_g g, \sum\limits_{g\in G} n_g g \in F[G]$

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\sum_{g\in G} m_g g+\sum_{g\in G} n_g g\Big) &= \varphi\Big(\sum_{g\in G}(m_g+n_g)g\Big)\\ &= \sum_{g\in G}(m_g+n_g)=\sum_{g\in G} m_g+\sum_{g\in G} n_g\\ &= \varphi\Big(\sum_{g\in G} m_g g\Big)+\varphi\Big(\sum_{g\in G} n_g g\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\Big(\sum_{g\in G} m_g g\Big)\Big(\sum_{g\in G} n_g g\Big)\Big) &= \varphi\Big(\sum_{h\in G}\sum_{g\in G} m_h n_g hg\Big)=\sum_{h\in G}\varphi\Big(\sum_{g\in G} m_h n_g hg\Big)\\ &= \sum_{h\in G}\sum_{g\in G} m_h n_g=\Big(\sum_{h\in G} m_h\Big)\Big(\sum_{g\in G} n_g\Big)\\ &= \Big(\sum_{g\in G} m_g g\Big)\varphi\Big(\sum_{g\in G} n_g g\Big).\end{aligned}$$

其中，F作为$F[G]$-模配备了平凡的群作用. 即

$$gx \longmapsto x, \qquad \forall g\in G, \quad \forall x\in F.$$

于是，φ是$F[G]$-模满同态. 显然，$\ker\varphi = I$. 作为$F[G]$- 模，$F[G]/I \cong F$.

若作为$F[G]$-模，$F[G]/M \cong F$，由$F\subseteq F[G]$知，作为F-线性空间，它们也同构. 故$\dim_F M = |G|-1$. 于是，$F[G]$的子空间M是$|G|-1$ 维F-线性空间，从而是一个超平面. 故

$$M=\Big\{\sum_{g\in G} n_g g : n_g\in F, (n_1,\cdots,n_{|G|})\perp\overrightarrow{n}\Big\}.$$

由于M是$F[G]$的理想，故

$$\sum_{g\in G} n_{h^{-1}g} g=\sum_{g\in G} n_g hg = h\sum_{g\in G} n_g g\in M, \qquad \forall h\in G.$$

于是，法向量n的各个分量必须都相同. 故

$$\sum_{g\in G} n_g = 0.$$

于是，$M=I$.

3) 由于char$F \mid |G|$，故

$$\varphi|_N : \lambda\sum_{g\in G} g \longmapsto \lambda|G| = 0.$$

因此，$N\subseteq I$.

若I是$F[G]$的直和项，则存在$F[G]$的子模$I'\cong F[G]/I\cong F$使得

$$F[G] = I\oplus I'.$$

由(1)知，$I'=N$. 但$N\cap I = N \neq 0$. 这就产生了矛盾. □

Remark. 1) F视为$F[G]$-模称为G的平凡表示.

2) Maschke定理的逆命题也成立：设G是一个有限群，char$F \mid |G|$. 那么，$F[G]$不是半单代数.

习题 3.5.

设$n \in \mathbb{N}$，B是A-模，U是B的一个n维F-子空间. 若对任意A-模M以及$T \in \mathrm{Hom}_F(U, M)$均可唯一延拓为$\widetilde{T} \in \mathrm{Hom}_A(B, M)$. 证明：$B \cong A^n$.

Proof. 设$a \in A$是单位元，令$a_i := a$，$i = 1, 2, \cdots, n+2$. 那么，$V := \bigoplus_{i=1}^{n} Fa_i$是自由$A$-模$A^n = \bigoplus_{i=1}^{n} Aa_i$的$n$维$F$-线性子空间. 设$e_1, \cdots, e_n \in B$是$U$的一组基，则$\varphi : U \longrightarrow A^n$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f_i a_i, \qquad \forall f_i \in F$$

是线性变换且$U \cong \mathrm{im}\varphi = V$. 由条件知，存在$\varphi$的$A$-模同态延拓$\widetilde{\varphi} : B \longrightarrow A^n$.

令$\psi : A^n \longrightarrow B$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} k_i e_i, \qquad \forall k_i \in A.$$

显然，ψ是A-模同态. 故$\mathrm{im}\psi$是B的子模. 由于$\widetilde{\varphi}$是φ的延拓，$\widetilde{\varphi}|_{\mathrm{im}\psi} = \psi^{-1}$.

考虑嵌入映射$i : U \longrightarrow B$. $\mathrm{id} : B \longrightarrow B$是它作为线性变换的$A$-模延拓. 又因为

$$(\psi\widetilde{\varphi})|_{\mathrm{im}\psi} = \psi(\widetilde{\varphi}|_{\mathrm{im}\psi}) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}\psi}$$

且$U \subseteq \mathrm{im}\psi$. 故

$$(\psi\widetilde{\varphi})|_U = i.$$

由A-模延拓的唯一性知，$\psi\widetilde{\varphi} = \mathrm{id}_B$. 因此，$\widetilde{\varphi}$是单射. 从而，$B \cong A^n$.

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "i"] & \\
B \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & A^n \arrow[r, "\psi"] & B
\end{tikzcd}$$

□

Remark. 此题目给出了有限维F-代数上的秩有限的自由模的另一刻画.

事实上，任意函数$f : S \longrightarrow T$都可以唯一延拓为自由R-模之间的同态$F(f) : F(S) \longrightarrow F(T)$. 其中，$F(S), F(T)$是以$S, T$为基的自由$R$-模. 并且

1) $F(fg) = F(f)F(g)$.

2) $F(f)$是单同态当且仅当f是单射.

3) $F(f)$是满同态当且仅当f是满射.

4) $F(f)$是同构当且仅当f是双射. 其中，$F(f)$的定义如下：

$$F(f)(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(s_i) \in F(T), \qquad \forall \alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i \in F(S).$$

显然，存在具有泛性质的函数$f_s : S \longrightarrow F(S)$，$f_t : T \longrightarrow F(T)$使得对任意的$S, T$到$R$-模$X_s, X_t$的映射$g_s : S \longrightarrow X_s$，$g_t : T \longrightarrow X_t$存在唯一的$R$-模同态$h_s : F(S) \longrightarrow X_s$，$h_t : F(T) \longrightarrow X_t$ 满足

$$g_s = h_s f_s, \qquad g_t = h_t f_t.$$

习题 3.6.

设$T_n(F)$是n阶上三角方阵构成的F代数. 试求$T_n(F)$的极大幂零理想.

Proof. 设I是$T_n(F)$的极大幂零理想，J是由对角线上全为零的上三角方阵构成的集合. 显然，J是$T_n(F)$的理想.

$\forall M \in I$，存在$n \in \mathbb{N}$使得$M^n = 0$. 故x^n是M的化零多项式，从而M的特征值只有零. 因此，$M \in J$. 于是，$I \subseteq J$.

$\forall M_1, M_2 \in J$，由线性代数的知识

$$\operatorname{rank}(M_1M_2) \leq \max\{\operatorname{rank}(M_1), \operatorname{rank}(M_2)\} - 1.$$

由此可知，$J^n = 0$. 故J是幂零理想. 因此，$J \subseteq I$. □

Remark. $T_n(F)$作为$T_n(F)$-模同构于$V_n(F)$的所有非零$T_n(F)$-子模的直和.

习题 3.7.

设U是A-模，则U的n维列向量空间U^n是$M_n(A)$-模. 证明：

1) U是单A-模当且仅当U^n是单$M_n(A)$-模.
2) 对任意A-模U和V，$\operatorname{Hom}_A(U,V) \cong \operatorname{Hom}_{M_n(A)}(U^n, V^n)$.
3) 若M是$M_n(A)$-模，则存在A-模U使得$M \cong U^n$.

Proof. 1) U^n的$M_n(A)$子模都是A-子模.

若U是单A-模，则U^n的A-子模具有如下形式：

$$\bigoplus_{i\in\Sigma} U_i.$$

其中，Σ是集合$\{1, \cdots, n\}$的某个子集.

若$\Sigma \neq \{1, \cdots, n\}, \varnothing$，考虑$U^n$的$A$-子模，不妨设为

$$V := U_1 \oplus \cdots U_{n-1}.$$

那么，在置换矩阵

$$E_{1n} := E + \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_n(A)$$

下

$$E_{1n}(V) = U_2 \oplus \cdots U_n \neq V.$$

故V不是U^n的$M_n(A)$-子模. 于是，U^n的$M_n(A)$-子模只有零模和它本身，从而是单$M_n(A)$-模.

若U^n是单$M_n(A)$-模但U有非平凡A-子模V则V^n是U^n的非平凡$M_n(A)$-子模. 这就产生了矛盾.

2) 若$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$，则

$$\varphi E := \begin{pmatrix} \varphi & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}_{M_n(A)}(U^n, V^n).$$

显然，$\mathrm{Hom}_{M_n(A)}(U^n,V^n) \subseteq \mathrm{Hom}_A(U^n,V^n)$. 设$\varphi = (\varphi_{ij}) \in \mathrm{Hom}_A(U^n,V^n)$，$\varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$.
若$\varphi = (\varphi_{ij}) \in \mathrm{Hom}_{M_n(A)}(U^n,V^n)$，则

$$\varphi(Mu) = M\varphi(u), \qquad \forall M \in M_n(A).$$

于是，$\varphi = (\varphi_{ij})$与$M_n(A)$中的元素可交换. 故

$$\varphi_{ij} = 0, \qquad \forall i \neq j.$$

$$\varphi_{11} = \cdots = \varphi_{nn}.$$

此时，$\varphi = \varphi_{11}E$.

于是，$f : \mathrm{Hom}_A(U,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{M_n(A)}(U^n,V^n)$

$$\varphi \longmapsto \varphi E$$

是环同构.

3) 记第i行第i列处元素为1其余位置元素为零的$M_n(A)$中的矩阵为E_{ii}. 那么，$M_i := E_{ii}M$可视为A-模. 显然

$$M = EM = M\sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

$\forall m \in M_i \cap M_j = E_{ii}M \cap E_{jj}M$，$i \neq j$. 存在$m_i, m_j \in M$使得

$$E_{ii}m_i = m = E_{jj}m_j.$$

因此

$$m = E_{ii}m_i = (E_{ii}E_{ii})m_i = E_{ii}(E_{ii}m_i) = E_{ii}(E_{jj}m_j) = (E_{ii}E_{jj})m_j = 0.$$

故

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i.$$

显然，在置换矩阵E_{ij}下

$$E_{ij}M_i = M_j.$$

又因为E_{ij}可逆，故$M_i \cong M_j$. 令$U := M_1$，则U是A-模且U^n 作为$M_n(A)$-模同构于M. □

Remark. 1) 设A-模M有直和分解$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$，则$\mathrm{End}_A(M)$的单位元$\mathrm{id}_M$有分解

$$1 = \pi_1 + \cdots + \pi_n.$$

其中，$\pi_i : M \longrightarrow M_i$是典范投射. $\forall f \in \mathrm{End}_A(M)$，$f_{ji} : M_i \longrightarrow M_j$

$$x \longmapsto \pi_j f(x)$$

是A-模同态. 设$m=m_1+\cdots+m_n\in M$，$m_i\in M_i$. 那么

$$f(m)=f(m_1)+\cdots+f(m_n).$$

而$f(m_i)\in M$又可表示为

$$f(m_i)=m_{i1}+\cdots+m_{in}\in M,\qquad m_{ij}\in M_j.$$

于是

$$f(m)=\sum_{i,j}m_{ij}=\sum_{i,j}f_{ji}(m_i).$$

因此，有如下矩阵表达

$$f(m)=\begin{pmatrix}f_{11}&\cdots&f_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ f_{n1}&\cdots&f_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_n\end{pmatrix}.$$

此时，$\mathrm{End}_A(M)$中元素的运算和矩阵的运算是一致的.

2)

$$M\cong M_n(A)\otimes_{M_n(A)}M\cong(A^n\oplus\cdots\oplus A^n)\otimes_{M_n(A)}M\cong(A^n\otimes_{M_n(A)}M)^n.$$

3) A-模与$M_n(A)$-模没有本质的区别. 用范畴语言来说，A-模范畴与$M_n(A)$-模范畴是Morita等价的.

习题 3.8.

证明：A是单A-模当且仅当A是可除代数.

Proof. 由习题1.3知

$$\mathrm{End}_A(A)=\mathrm{Hom}_A(A,A)\cong A.$$

若A是单A-模，由引理3.51.(1)知，$A\cong\mathrm{End}_A(A)$是可除代数.

若A是可除代数，由定理3.46知，A是单$M_1(A)\cong A$-模. □

Remark. 1) 域上的有限维单代数就是有限维可除代数.

2) $\Longleftarrow$) 若A为可除代数，设M是A的非零A-子模，则M是A的理想. 由可除性知，对于$m\in M$，存在$a\in A$使得

$$1=am\in aM\subseteq M.$$

故$M=A$.

$\Longrightarrow$) 若A是单A-模，则

$$aA=A,\qquad\forall 0\neq a\in A.$$

故A是可除代数.

习题 3.9.

证明：M是单A-模当且仅当M是单$A/\mathrm{Jac}(A)-$模.

Proof. 不妨设$M\neq0$.

若$\mathrm{Jac}(A)M\neq0$，由M是单A-模知$\mathrm{Jac}(A)M=M$. 由于$\mathrm{Jac}(A)$是A的幂零理想，故

$$0=[\mathrm{Jac}(A)]^nM=M.$$

这就产生了矛盾. 于是，$\mathrm{Jac}(A)M = 0$. 由习题1.2知，M可视为$A/\mathrm{Jac}(A)$-模.

由于M的非零A-子模S满足$\mathrm{Jac}(A)S \subseteq \mathrm{Jac}(A)M = 0$，故$S$可视为非零$A/\mathrm{Jac}(A)$-子模.

由于M的非零$A/\mathrm{Jac}(A)$-子模S'满足$\mathrm{Jac}(A)S' \subseteq \mathrm{Jac}(A)M = 0$，故$S'$也可视为非零$A$- 子模.

因此，M的A-子模与M的$A/\mathrm{Jac}(A)$-子模之间有一个一一对应.

于是，M是单A-模当且仅当M是单$A/\mathrm{Jac}(A)-$模. □

Remark. 1) $A/\mathrm{Jac}(A)$总是半单代数.

2) 检验A-模M是否为单A-模只需检验半单$A/\mathrm{Jac}(A)$-模M是否为单$A/\mathrm{Jac}(A)$-模.

习题 3.10.

设S是单$\mathbb{C}[G]-$模，U是一维$\mathbb{C}[G]-$模. 证明：$S \otimes_{\mathbb{C}[G]} U$也是单$\mathbb{C}[G]-$模.

Proof. 由于S是单$\mathbb{C}[G]-$模，故S是G的不可约复表示. 由于U是一维$\mathbb{C}[G]-$模，故U是G的线性复表示. 由命题3.65.(2)与命题3.76知

$$\chi_{S\otimes_{\mathbb{C}[G]}U} = \chi_S \cdot \chi_U$$

是G的不可约特征. 故$S \otimes_{\mathbb{C}[G]} U$也是$G$的不可约复表示. 因此，$S \otimes_{\mathbb{C}[G]} U$是单$\mathbb{C}[G]-$模. □

Remark. 1) 事实上，由于U是一维$\mathbb{C}[G]$-模，$S \otimes_{\mathbb{C}[G]} U$的子$\mathbb{C}[G]$-模一定具有$S' \otimes_{\mathbb{C}[G]} U$的形式. 其中，$S'$是$S$的子$\mathbb{C}[G]$-模.

2) 若S也是一维$\mathbb{C}[G]$-模，则$S \otimes_{\mathbb{C}[G]} U$还是一维$\mathbb{C}[G]$-模. 因此，$\mathbb{C}[G]$上的一维模同构类在张量积$\otimes_{\mathbb{C}[G]}$下构成一个有限群$\widehat{G}$，称为$G$的特征群.

习题 3.11.

对于域F，设$\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \{\pm 1\} \leq F$是符号映射. 令$\mathrm{Sig}(F) := F$且

$$\gamma a := \mathrm{sgn}(\gamma)a, \quad \forall \gamma \in S_n, \quad \forall a \in F.$$

这样，$\mathrm{Sig}(F)$成为$F[S_n]$-模. 证明：$\mathrm{Sig}(F)$是单$F[S_n]$-模.

Proof. 显然，$\mathrm{Sig}(F)$是$F[S_n]$-模. 若M是$\mathrm{Sig}(F)$的子$F[S_n]$-模，则它也是域F的子F-模. 因此，M作为域F的理想只能是平凡理想. 故$\mathrm{Sig}(F)$是单$F[S_n]$-模. □

Remark. 若$\mathrm{char}F = 2$，则$\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \{\pm 1\} = \{1\} \leq F$. 故$\mathrm{Sig}(F)$作为$F[G]$-模同构于平凡表示$F$.

若$\mathrm{char}F \neq 2$，则$\mathrm{Sig}(F)$作为$F[G]$-模不同构于平凡表示F.

习题 3.12.

设G是有限群，k与K分别是特征为p, q的代数闭域且p, q与$|G|$互素. 证明：

1) $k[G]$与$K[G]$有相同个数的不可约分量.
2) G在k与K上的不可约表示有相同的次数.

Proof. 1) 由定理3.59及其相关引理的证明知，将复数域$\mathbb{C}$换为任意一个特征不整除$|G|$的G的分裂域F，命题都成立. 特别地，F可取为代数闭域.

现在，$k[G]$与$K[G]$的不可约分量的个数r都等于群G的共轭类个数.

2) □

习题 3.13.

证明：U是单$\mathbb{C}[G]$-模当且仅当它的对偶U^*是单$\mathbb{C}[G]$-模.

Proof. 1) 设F是特征为零的群G的分裂域，χ是G的F-表示ρ的特征标. 那么，ρ不可约当且仅当$(\chi,\chi)=1$.

设$\rho=\bigoplus\limits_{i=1}^{r} n_i\rho_i$是$\rho$的不可约分解，$\chi_i$是$\rho_i$的特征标. 那么，$\chi=\sum\limits_{i=1}^{r} n_i\chi_i$. 由行正交关系知

$$(\chi,\chi)=\sum_{i=1}^{r} n_i 1_F.$$

由于$\mathrm{char}F=0$，故$(\chi,\chi)=1 \iff r=1, n_1=1 \iff \rho$不可约.

2) 由命题3.65.(3)知

$$(\chi_{U^*},\chi_{U^*})=(\overline{\chi_U},\overline{\chi_U})=\overline{(\chi_U,\chi_U)}.$$

于是，U是G的不可约复表示$\iff (\chi_U,\chi_U)=1 \iff (\chi_{U^*},\chi_{U^*})=1 \iff U^*$是$G$的不可约复表示. 因此，$U$是单$\mathbb{C}[G]$-模当且仅当它的对偶$U^*$是单$\mathbb{C}[G]$-模. □

Remark. 判断不可约表示的常用方法就是做内积.

习题 3.14.

设χ是G的不可约特征，$\mu_{|G|}$是$|G|$次单位根构成的群. 证明：

$$H:=\left\{g\in G:\frac{\chi(g)}{\chi(1)}\in\mu_{|G|}\right\}\lhd G.$$

Proof. $\chi(g)$是$\chi(1)$个$|g|$次单位根之和. 若$g\in H$，则$|\chi(g)|=|\chi(1)|=\chi(1)$. 此时，这些单位根均相等. 不妨设它们为$\xi_g$. 由于$|g|\mid|G|$，故$\xi_g\in\mu_{|g|}\subseteq\mu_{|G|}$.

$\forall g,h\in H$

$$\rho(g)=\xi_g E,\qquad \rho(h)=\xi_h E.$$

故

$$\rho(gh^{-1})=\xi_g\xi_h^{-1}E.$$

此时

$$\frac{\chi(gh^{-1})}{\chi(1)}=\frac{\chi(1)\xi_g\xi_h^{-1}}{\chi(1)}=\xi_g\xi_h^{-1}\in\mu_{|G|}.$$

故$H\leq G$.

由于

$$\chi(h)=\chi(ghg^{-1}),\qquad \forall g\in G,\quad \forall h\in H.$$

故$H\lhd G$. □

习题 3.15.

求χ的行列式. 证明：χ中每行的和是非负整数.

Proof. 1) 视$\mathfrak{X}=\big(\chi_i(g_j)\big)$为$r\times r$矩阵，则行正交关系给出

$$\mathfrak{X}\begin{pmatrix}\frac{k_1}{|G|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{k_r}{|G|}\end{pmatrix}\overline{\mathfrak{X}}^T=E_r.$$

其中，$k_i=[G:C_G(g_i)]=\dfrac{|G|}{|C_G(g_i)|}$. 于是

$$\det\mathfrak{X}\det\overline{\mathfrak{X}}=|\det\mathfrak{X}|^2=\prod_{i=1}^{r}|C_G(g_i)|.$$

现在，我们考虑$\det\mathfrak{X}$与$\det\overline{\mathfrak{X}}$的关系. 定义$G$的共轭类之间的置换

$$[g]\longmapsto[g^{-1}].$$

显然，该置换的阶为2. 因此，它是一些互不相交的2-轮换的乘积. 在该置换下，$[g]$的轨道中的元素个数只能是1或2. 记元素个数是2的轨道个数为l，它由G唯一确定. 在该置换下，特征标表相对之前发生了l次互不相交的列对换，记为$\widetilde{\mathfrak{X}}$. 显然，$\det\widetilde{\mathfrak{X}}=(-1)^l\det\mathfrak{X}$. 由$\overline{\chi(g)}=\chi(g^{-1})$知，$\overline{\mathfrak{X}}=\widetilde{\mathfrak{X}}$. 故

$$(-1)^l(\det\mathfrak{X})^2=\prod_{i=1}^{r}|C_G(g_i)|.$$

于是

$$\det\mathfrak{X}=\pm\mathrm{i}^l\sqrt{\prod_{i=1}^{r}|C_G(g_i)|}.$$

其中，正负号视具体表示而定.

2) 令$X:=G$，定义G对X的群作用为

$$g(x):=gxg^{-1},\qquad\forall x\in X,\quad\forall g\in G.$$

那么，X是一个G-集且$\mathbb{C}[X]$作为$\mathbb{C}[G]$-模可视为群G的一种表示. 显然

$$g(X)=gXg^{-1}=X,\qquad\forall g\in G.$$

因此，G对X的作用是一种置换.

设χ的某个不可约特征为α，$\mathbb{C}[X]$的特征为β. 由定理3.69知，(α,β)是非负整数. 由于g_t对X的作用为置换，因此g_t对应的矩阵$\rho(g_t)$的每一行每一列只有一个1，其余全为零. 故

$$\begin{aligned}\beta(g_t)=\mathrm{tr}\big(\rho(g_t)\big)&=|\{x\in X:x=g_t(x)=g_txg_t^{-1}\}|\\&=|\{x\in X:xg_tx^{-1}=g_t\}|=|X_{g_t}|.\end{aligned}$$

其中，X_{g_t}是X也即G关于g_t的固定子群.

显然，g_t所在的轨道$[g_t]$为$X(g_t)$也即g_t的共轭类. 因此，由轨道公式知

$$|G|=|[g_t]||X_{g_t}|=k_t\beta(g_t).$$

故

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)\overline{\beta(g)}=\frac{1}{|G|}\sum_{t=1}^{r}k_t\alpha(g_t)\overline{\beta(g_t)}=\sum_{t=1}^{r}\alpha(g_t)$$

是非负整数. □

Remark. 1) $\mathfrak{X}$中的每列之和是整数.

设$K/\mathbb{Q}$是由$\mathfrak{X}$中元素所确定的Galois扩张. $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$作用在$\mathfrak{X}$上是行置换，因此它保持$\mathfrak{X}$的每列之和不变. 因此，$\mathfrak{X}$的每列之和是有理代数整数，从而是整数.

2) 由于群G的任意特征χ都是其不可约特征的非负整数线性组合. 因此$\sum\limits_{t=1}^{r}\chi(g_t)$也是非负整数.

习题 3.16.

设G的阶是奇数. 证明：若χ是G的实值不可约特征，则$\chi=\chi_1$为主特征.

Proof. 若$\chi\neq\chi_1$是实值不可约特征，则由$\chi(1)\mid|G|$知$\chi(1)$是奇数且

$$\chi(g)=\overline{\chi(g)}=\chi(g^{-1}),\qquad \forall g\in G.$$

由行正交关系知

$$(\chi,\chi_1)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)=0.$$

故

$$\chi(1)=-\sum_{g\in G-\{1\}}\chi(g).$$

由于$|G|$是奇数，因此G中不含二阶元，故

$$g\neq g^{-1},\qquad \forall g\in G-\{1\}.$$

从而，$G-\{1\}$中的元素可以按(g,g^{-1})配对，分成两类. 记其中一类为H，则

$$\chi(1)=-\sum_{g\in G-\{1\}}\chi(g)=-\sum_{g\in H}\chi(g)-\sum_{g\in H}\chi(g^{-1})=-2\sum_{g\in H}\chi(g).$$

于是，$\frac{1}{2}\chi(1)$是一些单位根的和，从而是代数整数. 但有理代数整数都是整数，故$2\mid\chi(1)$. 这与$\chi(1)$是奇数矛盾. $\square$

习题 3.17.

决定正五边形的二面体群

$$D_{10}=\langle\sigma,\tau:\sigma^5=\tau^2=1,(\sigma\tau)^2=1\rangle$$

的特征标表.

Proof. 1) 设H是在G中的指数为m的Abel子群. 那么，群G的任意不可约复表示的维数不超过m.

事实上，设(V,ρ)是G的任意不可约复表示，则$(V,\rho|_H)$是H的复表示. 取H的$(V,\rho|_H)$的不可约子表示U. 因为H是Abel群，故$\dim_{\mathbb{C}}U=1$. 令$U=\mathbb{C}u$，$u\in H$.

$$V'=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{g(u):g\in G\}.$$

那么，V'是(V,ρ)的非零子表示，从而$V'=V$.

另一方面，设$G=g_1H\cup\cdots\cup g_mH$是左陪集分解. 那么

$$V'=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{g_iu:1\leq i\leq m\}.$$

故

$$\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} V' \leq m.$$

2) 考虑二面体群

$$D_n := \langle a, b : a^n = b^2 = (ba)^2 = 1 \rangle.$$

由于D_n含有n阶循环子群$\langle a \rangle$. 由(1)知，D_n的任意不可约复表示的次数不超过2.

$n = 2m$. 此时，D_n的全部一维不可约复表示只有以下四个：

$$\rho_1 : a \longmapsto 1, \quad b \longmapsto 1,$$

$$\rho_2 : a \longmapsto 1, \quad b \longmapsto -1,$$

$$\rho_3 : a \longmapsto -1, \quad b \longmapsto 1,$$

$$\rho_4 : a \longmapsto -1, \quad b \longmapsto -1.$$

剩下的不可约复表示都是二维的，它们是：

$$\tau_l : a \longmapsto \begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}, \qquad b \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}, \quad 1 \leq l \leq m-1.$$

由于这些不可约二维复表示的特征标互不相同，因此它们是互不等价的不可约复表示. 又因为

$$4m = 2n = |G| = 4 + \sum_{l=1}^{m-1} 2^2 = 4 + 4(m-1).$$

故它们是群D_n的全部不可约复表示. 由此得到特征标表：

	1	1	m	m	2
	1	a^m	b	ab	$a^k, (1 \leq k \leq m-1)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	$(-1)^m$	1	-1	$(-1)^k$
χ_4	1	$(-1)^m$	-1	1	$(-1)^k$
χ_{τ_l}	2	$(-1)^l$	0	0	$2\cos\frac{2kl\pi}{n}$
$(1 \leq l \leq m-1)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

$n = 2m+1$. 此时D_n仅有两个一维不可约复表示，即ρ_1, ρ_2. 其余不可约复表示均是二维的，即τ_l，$1 \leq l \leq m$. 又因为

$$4m + 2 = 2n = |G| = 2 + \sum_{l=1}^{m} 2^2 = 2 + 4m.$$

故它们是群D_n的全部不可约复表示. 由此得到特征标表：

	1	n	2
	1	b	$a^k, (1 \leq k \leq m)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_{τ_l}	2	0	$2\cos\frac{2kl\pi}{n}$
$(1 \leq l \leq m)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

3) 由(2)知，D_5的特征标表为：

	1	5	2	2
	1	τ	σ	σ^2
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1
χ_3	2	0	$2\cos\frac{2\pi}{n}$	$2\cos\frac{4\pi}{n}$
χ_4	2	0	$2\cos\frac{4\pi}{n}$	$2\cos\frac{8\pi}{n}$

□

习题 3.18.

决定对称群S_5的特征标表.

Proof. 由$H := S_4$的特征标表利用诱导表示求$G := S_5$的特征标表.

G共七个共轭类. 设$\chi_1, \cdots, \chi_5$由H的特征标表给出. 对于$g_2 = (12)$，$g_3 = (12)(34)$，$g_4 = (123)$和$g_6 = (1234)$，它们在H上均只有一个共轭类，其阶数分别为$6, 3, 8, 6$. 于是，由命题3.107知

$$\chi_i^G(g_2) = 5 \cdot \frac{6}{10}\chi_i(g_2) = 3\chi_i(g_2),$$

$$\chi_i^G(g_3) = 5 \cdot \frac{3}{15}\chi_i(g_3) = \chi_i(g_3),$$

$$\chi_i^G(g_4) = 5 \cdot \frac{8}{20}\chi_i(g_4) = 2\chi_i(g_4),$$

$$\chi_i^G(g_6) = 5 \cdot \frac{6}{30}\chi_i(g_4) = \chi_i(g_6).$$

由$(\chi_1^G, \varphi_1) = 1$，$(\chi_1^G, \chi_1^G) = 2$知$\chi_1^G - \varphi_1$为不可约特征. 不妨设其为$\varphi_3$.

由$(\chi_1^G, \varphi_2) = 1$，$(\chi_2^G, \chi_2^G) = 2$知$\chi_2^G - \varphi_1$为不可约特征且它不是$\varphi_3$. 不妨设为$\varphi_4$.

由

$$1 + 1 + 16 + 16 + f_5^2 + f_6^2 + f_7^2 = 120$$

知

$$f_5^2 + f_6^2 + f_7^2 = 86.$$

由$f_i \mid |G|$知$f_i \neq 7$. 故$f_5 = 5$，$f_6 = 5$，$f_7 = 6$.

由$(\chi_3^G, \chi_3^G) = 2$，$(\chi_3^G, \varphi_3) = (\chi_3^G, \varphi_4) = 0$知$\chi_3^G = \varphi_5 + \varphi_6$.

由$\varphi_2\varphi_7 = \varphi_7$知$\varphi_7(g_2) = \varphi_7(g_5) = \varphi_7(g_6) = 0$.

由列正交关系知$\varphi_5(g_2) = \pm 1$，$\varphi_6(g_2) = \mp 1$. 故$\varphi_6 = \varphi_2\varphi_5$.

由列正交关系可得φ_7的全部取值.

于是，S_5的特征标表为：

	1	10	20	15	20	30	24
	1	(12)	(123)	(12)(34)	(123)(45)	(1234)	(12345)
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_3	4	2	1	0	-1	0	-1
χ_4	4	-2	1	0	1	0	-1
χ_5	5	1	-1	1	1	-1	0
χ_6	5	-1	-1	1	-1	1	0
χ_7	6	0	0	-2	0	0	1

□

习题 3.19.

设W是$F[G]$-模，它由$F[H]$-模V生成且$\dim_F W = [G:H]\dim_F V$. 证明：$W \cong \mathrm{Ind}_H^G V$.

Proof. 记$r := [G:H]$，$e, g_1 \cdots, g_{r-1}$是H在G中的左陪集代表元. 由条件知

$$W = eV \oplus g_1 V \oplus \cdots \oplus g_{r-1} V, \qquad t_i \in G - H, \quad 1 \le i \le r-1.$$

而

$$G = eH \amalg g_1 H \amalg \cdots \amalg g_{r-1} H.$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_H^G V = F[G] \otimes_{F[H]} V =& \big(e(F[H]) \otimes_{F[H]} V\big) \oplus \big(g_1(F[H]) \otimes_{F[H]} V\big) \oplus \cdots \oplus \big(g_{r-1}(F[H]) \otimes_{F[H]} V\big) \\ \cong& \big(e \otimes_{F[H]} V\big) \oplus \big(g_1 \otimes_{F[H]} V\big) \oplus \cdots \oplus \big(g_{r-1} \otimes_{F[H]} V\big) \cong W.\end{aligned}$$

□

Remark. 设V是$F[H]$-模，W是包含V的$F[G]$-模. 若对任意的$F[G]$-模U以及$\varphi \in \mathrm{Hom}_{F[H]}(V,U)$都可唯一地延拓为$\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{F[H]}(W,U)$. 那么，$W \cong \mathrm{Ind}_H^G V$. 这时，我们称$W$对于$V$是相对$H$-自由的. 当$H$为$G$ 的平凡子群时，即为习题3.5.

习题 3.20.

作为F-线性空间，$\mathrm{Hom}_{F[H]}(\mathrm{Res}_H^G U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{F[G]}(U, \mathrm{Ind}_H^G V)$

$$\varphi \longmapsto \Big(u \mapsto \sum_{t \in T} t \otimes_{F[H]} \varphi(t^{-1}u)\Big)$$

是同构映射. 其中，T是由H在G中的左陪集代表元构成的集合.

Proof. 1) 映射的合理性.

$\forall u_1, u_2 \in U$，由于$\varphi \in \mathrm{Hom}_{F[H]}(\mathrm{Res}_H^G U, V)$，故$u_1 + u_2$的像为

$$\begin{aligned}\sum_{t\in T} t \otimes_{F[H]} \varphi(t^{-1}u_1 + t^{-1}u_2) &= \sum_{t\in T} t \otimes_{F[H]} [\varphi(t^{-1}u_1) + \varphi(t^{-1}u_2)] \\ &= \sum_{t\in T} t \otimes_{F[H]} \varphi(t^{-1}u_1) + \sum_{t\in T} t \otimes_{F[H]} \varphi(t^{-1}u_2).\end{aligned}$$

$\forall g \in G$，存在$t_0 \in T$使得$g = t_0 h \in tH$. 由于$\varphi \in \mathrm{Hom}_{F[H]}(\mathrm{Res}_H^G U, V)$，故$gu$的像为

$$\begin{aligned}\sum_{t\in T} t \otimes_{F[H]} \varphi(t^{-1}t_0 h u) =& \sum_{t\in T} t \otimes_{F[H]} h\varphi(t^{-1}t_0 u) \\ =& g \sum_{t\in T} t_0^{-1} t \otimes_{F[H]} \varphi(t^{-1}t_0 u) \\ =& g \sum_{t\in T} t \otimes_{F[H]} \varphi(t^{-1}u).\end{aligned}$$

显然，$\sum\limits_{t\in T} t\otimes_{F[H]}\varphi(t^{-1}u)\in \mathrm{Ind}_H^G V$. 结合分配律知，映射

$$u\longmapsto \sum_{t\in T} t\otimes_{F[H]}\varphi(t^{-1}u)$$

是$F[G]$-线性的. 故映射的定义是合理的.

2) F-线性同构.

显然，该映射是F-线性的.

由$\mathrm{im}\varphi\subseteq V$知

$$\varphi(t^{-1}u)=\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(t)}(u)e_i,\qquad \forall u\in U,\quad \forall t\in T.$$

其中，$e_1,\cdots,e_n$是F-线性空间V的一组基. 若

$$0=\sum_{t\in T} t\otimes_{F[H]}\varphi(t^{-1}u)=\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T}\lambda_i^{(t)}(u)(t\otimes_{F[H]} e_i),\qquad \forall u\in U.$$

那么

$$\lambda_i^{(t)}(u)\equiv 0,\qquad \forall 1\le i\le n,\quad \forall t\in T,\quad \forall u\in U.$$

故$\varphi\equiv 0$. 因此，该映射为单射.

若$f\in \mathrm{Hom}_{F[G]}(U,\mathrm{Ind}_H^G V)$，则

$$f(u)=\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T}\lambda_i^{(t)}(u)(t\otimes_{F[H]} e_i)=\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T} t\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(t)}(u)e_i.$$

令$\varphi:\mathrm{Res}_H^G U\longrightarrow V$

$$\varphi(u)=\pi\circ f(u)=\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(1)}(u)e_i.$$

其中，$\pi:\mathrm{Ind}_H^G V\longrightarrow V$为典范投射. 由

$$f(t_0^{-1}u)=\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T} t\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(t)}(t_0^{-1}u)e_i,$$

$$t_0^{-1}f(u)=\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T} t_0^{-1}t\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(t)}(u)e_i=\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T} t\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(t_0t)}(u)e_i$$

知

$$\varphi(t_0^{-1}u)=\sum_{i=1}^n\lambda_i^{(t_0)}(u)e_i,\qquad \forall t_0\in T,\quad \forall u\in \mathrm{Res}_H^G U.$$

特别地

$$f(hu)=\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T} t\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(t)}(hu)e_i=\sum_{i=1}^n 1\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(1)}(hu)e_i+\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T-\{1\}} t\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(t)}(hu)e_i,$$

$$\begin{aligned}hf(u)&=\sum_{i=1}^n h\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(1)}(u)e_i+h\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T-\{1\}} t\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(t)}(u)e_i\\&=\sum_{i=1}^n 1\otimes_{F[H]} h\lambda_i^{(1)}(u)e_i+h\sum_{i=1}^n\sum_{t\in T-\{1\}} t\otimes_{F[H]}\lambda_i^{(t)}(u)e_i.\end{aligned}$$

故

$$\varphi(hu)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(1)}(hu)e_i=h\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(1)}(u)e_i=h\varphi(u),\qquad \forall h\in H,\quad \forall u\in \mathrm{Res}_H^G U.$$

因此，$\varphi\in \mathrm{Hom}_{F[H]}(\mathrm{Res}_H^G U,V)$且是$f$的原像. 从而，该映射为满射. □

Remark. 此题目与习题3.7.(2)有些相似.

习题 3.21.

设p,q为素数且$p\equiv 1 \mod q$. 证明：存在唯一的pq阶非Abel群G并求它的特征标表.

Proof. 1) 乘法群$\mathbb{Z}_p^*$是循环群.

存在$n\in\mathbb{N}$使得

$$n^{p-1}\equiv 1 \mod p,\quad n^r\not\equiv 1 \mod p,\qquad \forall 0<r<p-1.$$

2) 若$q\mid p-1$，则$\mathbb{Z}_p^*$中存在q阶元素$u\in\mathbb{N}$使得

$$u^q\equiv 1 \mod p,\qquad u^r\not\equiv 1 \mod p,\qquad \forall 0<r<q.$$

3) $G\cong F_{p,q}$.

$$F_{p,q}:=\{a,b:a^p=b^q=1,b^{-1}ab=a^u\}.$$

其中，u在$\mathbb{Z}_p^*$中的阶为q.

由Sylow定理，G存在一个p阶正规子群$H\lhd G$. 显然，$H,G/H$是p,q阶循环群.

不妨设

$$H=\langle a\rangle,\qquad G/H=\langle Hb\rangle.$$

此时，G由a,b 生成. 由于G不是Abel群，故pq不是b的阶，而$b^q\in H$，故b的阶是q. 又因为$H\lhd G$，存在$u\in\mathbb{N}$使得

$$b^{-1}ab=a^u.$$

特别地

$$a=b^{-q}ab^q=b^{-(q-1)}a^ub^{q-1}=\cdots=a^{u^q}.$$

故$u\equiv 1 \mod p$. 因此，u在$\mathbb{Z}_p^*$中的阶为q或1.

$|u|=1$时，由$b^{-1}ab=a$知，G是Abel群. 这就产生了矛盾. 故u在$\mathbb{Z}_p^*$中的阶为q.

4) $F_{p,q}$的非平凡共轭类为

$$(a^{v_i})^G:=\{a^{v_is}:s\in S\},\qquad 1\le i\le r,$$

$$(b^n)^G:=\{a^mb^n:0\le m\le p-1\},\qquad 1\le n\le q-1.$$

其中，S是包含u的$\mathbb{Z}_p^*$的q阶子群，$r:=[\mathbb{Z}_p^*:S]$，$v_1,\cdots,v_r\in\mathbb{Z}_p^*$是$S$在$\mathbb{Z}_p^*$中的$r$个陪集代表元.

由(3)知

$$b^{-j}a^vb^j=a^{vu^j}.$$

由此可知a^{v_i}的共轭类至少包含$\{a^{v_is}:s\in S\}$中的q个元素. 又因为$\langle a\rangle\le C_G(a^{v_i})\le G$，故

$$[G:C_G(a^{v_i})]\le[G:\langle a\rangle]=q.$$

于是，a^{v_i}的共轭类中元素个数为$[G:C_G(a^{v_i})]=q$.

同理，由$\langle b\rangle \leq C_G(b^n) \leq F_{p,q}$知

$$|\langle b\rangle| \mid |C_G(b^n)| \mid pq.$$

因此

$$|C_G(b^n)| = q, \qquad \forall n \neq 0 \mod q.$$

于是，b^n的共轭类中元素个数为$[G : C_G(b^n)] = p$. 由于$G/\langle a\rangle$是q阶Abel群，因此b^n的共轭类都具有$a^m b^n$的形式.

5) 由(4)知$F_{p,q}$共有$q+r$个共轭类，因此有$q+r$个不可约特征. 显然，G的换位子群为$G' = \langle a\rangle$. 因此，$|G/G'| = q$. 故G的线性特征共q个，它们是

$$\chi_n(a^x b^y) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n y}{q}}, \qquad 0 \leq x \leq p-1, 0 \leq y, n \leq q-1.$$

接下来，只需说明G恰好有r个q维不可约特征即可.

显然，$\langle a\rangle$的p个线性特征为

$$\psi_v(a^x) = \varepsilon^{vx}, \qquad 0 \leq x \leq p-1.$$

其中，$\varepsilon := \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p}}$，$v \in \mathbb{Z}_p^*$. 我们来计算它们在$G$中的诱导特征

$$\psi_v^G(a^x b^y) = 0, \qquad 1 \leq y \leq q-1,$$

$$\psi_v^G(a^x) = \sum_{s\in S} [G : \langle a\rangle] \frac{1}{q} \varepsilon^{vsx} = \sum_{s\in S} \varepsilon^{vsx}.$$

由于$\psi_v^G(1) = |S| = q$，故ψ_v^G是G的q维复表示. 又因为

$$\psi_v^G = \psi_{sv}^G, \qquad \forall s \in S.$$

因此，互不相同的ψ_v^G共r个. 令

$$\varphi_j := \psi_{v_j}^G.$$

只需证明，φ_j是G的不可约复表示.

由定理3.104知

$$(\varphi_j|_{\langle a\rangle}, \psi_{v_j s})_{\langle a\rangle} = (\varphi_j, \psi_{v_j s}^G)_G = (\varphi_j, \varphi_j)_G.$$

因此

$$\varphi|_{\langle a\rangle} = (\varphi_j, \varphi_j)_G \sum_{s\in S} \psi_{v_j s} + \chi.$$

其中，χ或者为零，或者为$\langle a\rangle$的特征. 故

$$\varphi_j(1) \geq |S| (\varphi_j, \varphi_j)_G.$$

由于$\varphi_j(1) = q = |S|$，故$(\varphi_j, \varphi_j)_G = 1$. 因此，$\varphi_j$是$G$的不可约特征且

$$\varphi|_{\langle a\rangle} = (\varphi_j, \varphi_j)_G \sum_{s\in S} \psi_{v_j s}.$$

由于ψ_v线性无关，因此

$$\varphi_1|_{\langle a\rangle}, \qquad , \varphi_r|_{\langle a\rangle}$$

各不相同. 从而

$$\varphi_1, \cdots, \varphi_r$$

各不相同.

注意到

$$pq = |F_{p,q}| = \sum_{n=1}^{q} \chi_n^2(1) + \sum_{j=1}^{r} \varphi_j^2(1) = q + \frac{p-1}{q}q^2 = q + (p-1)q.$$

故

$$\chi_1, \cdots, \chi_q, \varphi_1, \cdots, \varphi_r$$

是$F_{p,q}$的$q+r$个全部不可约特征. □

习题 3.22.

令$\psi : G \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\psi(g) := \big|\{(x,y) \in G \times G : [x,y] = g\}\big|.$$

证明

$$\psi := \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{\chi_i(1)} \chi_i.$$

从而，ψ是G的一个特征.

Proof. □

Remark. 特别地，$g \in G$是换位子当且仅当

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} \neq 0.$$

习题 3.23.

试讲交错群A_4中所有不可约特征在A_5上的诱导特征分解为A_5上不可约特征之和的形式.

Proof. 1) A_4的特征标表.

	1	4	4	3
	(1)	(123)	(132)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2	1
χ_3	1	ω^2	ω	1
χ_4	3	0	0	-1

其中，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

2) A_5的特征标表.

	1	15	20	12	12
	(1)	(12)(34)	(123)	(12345)	(13524)
φ_1	1	1	1	1	1
φ_2	4	0	1	-1	-1
φ_3	5	1	-1	0	0
φ_4	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
φ_5	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3) 限制特征.

	1	4	4	3
	(1)	(123)	(132)	(12)(34)
$\varphi_1\|_{A_4}$	1	1	1	1
$\varphi_2\|_{A_4}$	4	1	1	0
$\varphi_3\|_{A_4}$	5	-1	-1	1
$\varphi_4\|_{A_4}$	3	0	0	-1
$\varphi_5\|_{A_4}$	3	0	0	-1

4) 由定理3.104

$$\chi_i^G=\sum_{j=1}^{5}(\chi_i^G,\varphi_j)_{A_5}\varphi_j=\sum_{j=1}^{5}(\chi_i,\varphi_j|_{A_4})_{A_4}\varphi_j.$$

故

$$\chi_1^G=\varphi_1+\varphi_2.$$

$$\chi_2^G=\chi_3^G=\varphi_3$$

$$\chi_4^G=\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5.$$

□

习题 3.24.

设$x,y\in G$. 证明：x,y共轭当且仅当对G的所有不可约特征χ，都有$\chi(x)=\chi(y)$.

Proof. $\Longrightarrow$) 由于G的所有不可约特征χ都是类函数，故$\chi(x)=\chi(y)$.

$\Longleftarrow$) 若x,y不共轭，由定理3.77知

$$0=\sum_{t=1}^{r}\chi_t(x)\overline{\chi_t(y)}=\sum_{t=1}^{r}\chi_t(x)\overline{\chi_t(x)}=|C_G(X)|.$$

这就产生了矛盾. □

Remark. G的不可约特征是类函数空间的一组基，因此$\chi(x)=\chi(y)$意味着x,y在任意类函数上的取值都相同. 考虑类函数f，它在x的共轭类上取值为1，其余地方取值为零. 那么，$f(y)=1$. 故x,y在同一共轭类之中.

习题 3.25.

设H是群G的指数为2的正规子群，$\rho:G\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$为$G$的表示. 令$\rho':G\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$

$$\rho'(g):=\begin{cases}\rho(g), & g\in H,\\ -\rho(g), & g\notin H.\end{cases}$$

证明：

1) ρ'是G的表示.
2) ρ,ρ'与$\rho|_H$有何关系.

Proof. 1) 只需证明：ρ'是群同态.

若$h_1, h_2 \in H$，则$h_1h_2 \in H$，故

$$\rho'(h_1, h_2) = \rho(h_1h_2) = \rho(h_1)\rho(h_2) = \rho'(h_1)\rho'(h_2).$$

若$g \in G - H, h \in H$，则$gh \in G - H$，故

$$\rho'(gh) = -\rho(gh) = -\rho(g)\rho(h) = \rho'(g)\rho(h).$$

若$g_1, g_2 \in G - H$，由$[G : H] = 2$知$\overline{g}_1 = \overline{g}_2 \in G/H$，从而$g_1g_2 \in H$. 故

$$\rho'(g_1g_2) = \rho(g_1g_2) = \big(-\rho(g_1)\big)\big(-\rho(g_2)\big) = \rho'(g_1)\rho'(g_2).$$

2)

$$(\rho|_H)^G = \rho + \rho'.$$

□

习题 3.26.

证明：

$$|C_G(g)| = \sum_{i=1}^{r} |\chi_i(g)|^2.$$

其中

$$C_G(g) := \{h \in G : hg = gh\}$$

是$g \in G$的中心化子.

Proof. 在定理3.77中令$g_i = g_j = g$，此时$i = j$. 故

$$|C_G(g)| = \sum_{i=1}^{r} |\chi_i(g)|^2.$$

□

习题 3.27.

设$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$是群$G$的表示. 证明：

1) $\rho^* : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

$$g \longmapsto \rho(g^{-1})^T$$

是G的表示. 此表示称为ρ的逆步表示(Contragredient Representation).

2) $\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$

Proof. 1) 只需证明：ρ^*是群同态.

$\forall g_1g_2 \in G$

$$\rho^*(g_1g_2) = \rho(g_2^{-1}g_1^{-1})T = \rho(g_1^{-1})^T\rho(g_2^{-1})^T = \rho^*(g_1)\rho^*(g_2).$$

2) 由χ的定义及命题3.64.(3)知

$$\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}.$$

□

习题 3.28.

证明：存在不可约表示$\rho : Q \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$使得其中

$$\sigma \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \tau \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q := \langle \sigma, \tau : \sigma^4 = 1, \sigma^2 = \tau^2, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle = \{\pm 1, \pm\sigma, \pm\tau, \pm\sigma^3\}$$

是Hamilton四元数群.

Proof. 显然，ρ是群同态. 此表示即为习题3.1中的Remark所提到的Hamilton四元数群的复表示.

下证其不可约

$$(\rho, \rho) = \frac{1}{8}(2^2 + (-2)^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 1.$$

□

习题 3.29.

设$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$和$\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$是群$G$的两种表示.

1) 证明：$\rho \otimes \rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W)$

$$(\rho \otimes \rho')(g) = \rho(g) \otimes \rho'(g)$$

是群G的表示.

2) 求$\rho \otimes \rho'$的特征.

Proof. 1) 只需验证$\rho \otimes \rho'$是群同态.

$\forall g_1, g_2 \in G$

$$\begin{aligned} \rho \otimes \rho'(g_1 g_2) &= \rho(g_1 g_2) \otimes \rho'(g_1 g_2) \\ &= \big(\rho(g_1)\rho(g_2)\big) \otimes \big(\rho'(g_1)\rho'(g_2)\big) \\ &= \big(\rho(g_1) \otimes \rho'(g_1)\big)\big(\rho(g_2) \otimes \rho'(g_2)\big) \\ &= (\rho \otimes \rho')(g_1)(\rho \otimes \rho')(g_2). \end{aligned}$$

2) 由命题3.65.(2)知

$$\chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho \chi_{\rho'}.$$

□