群的表示

F 域，G 群

$F[G] := \{ \sum_{g\in G} a_g g \mid$ 有限和 $\}$

加法
$\sum a_g g + \sum b_g g = \sum (a_g + b_g) g$

乘法
$(\sum a_g g)(\sum b_g g) = \sum_{g\in G} \sum_{h\in G} a_g b_h gh$

$= \sum_{g\in G} \left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g} \right) g$

群环：是环，是 F-代数

$F[G]$ 是交换环 $\Leftrightarrow$ G 是 Abel 群

$F[G]$ 是以 G 为基的 F-线性空间

维数有限 $\Leftrightarrow |G| < +\infty$

注，G 有限群．V 为 $F[G]$ 模

V 是有限生成 $F[G]$ 模 $\Leftrightarrow$

V 作为 F-线性空间维数有限

定义：线性作用：

$\forall$ $v, w \in V$，$g\in G$，$\lambda \in F$

$$\begin{cases} g(v+w) = gv + gw \\ g(\lambda v) = \lambda g v \end{cases}$$

对 V．$GL(V)$ 为 $V\to V$ 可逆线性变化群

（它是 $End_F(V)$ 的单位群）

命题．G 在 V 上线性作用
$\updownarrow$ 1:1
G 到 $GL(V)$ 的群同态

"$\Leftarrow$" ρ 群同态，定义 $g.v = \rho(g) v$

"$\Rightarrow$" 定义 $\rho(g)(v) = g.v$

则 $\rho(g)$ 是 $V\to V$ 的线性变换

且 $\rho(g^{-1})\rho(g)(v) = v$

$\rho(g)$ 可逆 $\square$

~~命题. G有限群, F域. 下列为双射~~

~~(1) G的有限维 F-表示~~

定义: (V,ρ) 称为 G的F-线性表示, (F表示)

指: V 为F-线性空间 配备 群同态 $\rho: G\to GL(V)$

表示的维数 $\dim_F V$

命题. $|G|<+\infty$ F域. 下列存在双射

(1) G的有限维 F表示 集合

(2) 有限维 F-线性空间, 并配备 G 线性作用的集合

(3) 有限生成 $F[G]$-模 集合

(1) ⇔ (2) 已证

(3)⇒(2) 设 V为有限生成 $F[G]$ 模

$\because \dim_F V<+\infty$

且 $G\times V\to V$, $(g,v)\mapsto g.v$ 为线性作用

(1)⇒(3) (V,ρ)

$F[G]\times V\to V$

$(\sum a_g g, v)\mapsto \sum a_g\rho(g)(v)$

V是 $F[G]$ 模 且 有限生成

命题 $|G|<+\infty$. (V_1,ρ_1), (V_2,ρ_2) 为G的 F表示, 下述等价

(1) V_1, V_2 作为 $F[G]$ 有限生成模同构

(2) 存在可逆 F-线性变换 $\varphi: V_1\to V_2$ 使 $\forall g\in G$ $\rho_2(g)=\varphi\circ\rho_1(g)\circ\varphi^{-1}$

(3) 可逆 F-线性变换 $\varphi: V_1\to V_2$, $g.\varphi(v)=\varphi(g.v)$

证. 只需考虑交换图.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "\varphi"'] & V_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"] & V_2 \end{tikzcd}$$

定义 (1) 表示的子表示 $W\subseteq V$

W 为 V的 $F[G]$ 子模

(等价地说 $gW\subseteq W$, $\forall g$ 成立)

(2) 不可约表示: V作为 $F[G]$ 模为单模

(3) 平凡表示: 平凡作用.

平凡表示是不可约表示

$\forall$ 一维表示是不可约表示

例(1) X为有限 G-集

$F[X]=\{\sum_{x\in X}a_x x \mid a_x\in F, x\in X\}$

定义 $g\, a_x x = a_x(gx)$

$F[X]$ 为维数为 $|X|$ 的 G-表示

称为 G的置换表示

(2) 若 $X=G$

$F[G]$ 为 G的 F-表示, 称为正则表示

子表示 $N=\langle\sum_{g\in G} g\rangle\cong F$

$I=\{\sum_{g\in G}a_g g \mid \sum a_g=0\}$

↑是 $F[G]\to F$, $\sum a_g g\mapsto \sum a_g$ 的核, 称为增广理想

$\boxed{\text{定理 Maschke}}$ char $F=0$ 或 与$|G|$互素

$\forall$表示V, 若 $U\subseteq V$, 则存在 $W\leq V$

$V=U\oplus W$. (即 $\forall$子表示均是直和项)

证. $\pi: V\to U$ 投射 $\pi|_W=\mathrm{Id}_W$

令 $\pi': V\to V$

$v\mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi(g^{-1}v)$

$\because \pi(g^{-1}v)\in U \Rightarrow \pi'(v)\in U$

对 $v\in U$ $\pi(g^{-1}u)=g^{-1}\pi(u)=g^{-1}u$

$\Rightarrow \pi'(v)=v$. $\pi'|_U=\mathrm{Id}$.

⇒作为 F-线性空间 $V=U\oplus\ker\pi'$

只需证 $\ker\pi'$ 为子表示.

即证 $\forall x\in G, v\in V$ $\pi'(xv)=x\pi'(v)$

$\because \pi'(xv)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi(g^{-1}xv)=\frac{1}{|G|}x\sum_{g\in G}(x^{-1}g)\pi(g^{-1}xv)$

$=x\left(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}h\pi(h^{-1}v)\right)=x\pi'(v)$ □

定义: M为单模的直和. M称为半单模

推论. $\mathrm{char}\,F=0$ 或 与 $|G|$ 互素

G 的 非零 F-表示 均是不可约 表示的直和

即. $\forall$ 有限生成 $F[G]$ 模 为 半单模

半单代数

A 为 有限维 F-代数. 所有A模 有限生成

即 有限维 F-线性空间

引理. M为 A模. 下述 等价

(1) M 的 $\forall$ 子模 为 M 的直和项

(2) M是半单模

(3) M 是 单子模之和

只证 (3) $\Rightarrow$ (1)

$N\subseteq M$ 子模.

令 $V=$ 极元 $\{V\subseteq M \mid V\cap N=0\}$

若 $N+V\subsetneq M=S_1+\cdots+S_n$

则 $\exists S \nsubseteq N+V$

$\because$ 由 $S\cap(N+V)\subsetneq S$

$\Rightarrow S\cap(N+V)=0$

$n\in N\cap(V+S)$

$n=v+s \Rightarrow n-v\in S\cap(N+V)=0$

$\Rightarrow s=0 \Rightarrow n=v\in N\cap V=0$

$\Rightarrow n=v=0 \Rightarrow N\cap(V+S)=0$

而 $V\subsetneq(V+S)$. 故 与极大元矛盾

引理. 半单模的商模. 子模. 是半单模

子模 N. 为 M 的直和项

故只考虑商模

设 $M=S_1+\cdots+S_n$ S_i 单模

令 $\pi: M\to M/N$

$S_i\mapsto S_i/\underset{\sim}{S_i\cap N}=0$ 或 S_i

$\therefore \pi(S_i)=0$ 或 S_i

$\therefore M/N=\pi(S_1)+\cdots+\pi(S_n)$

为单模之和. □

定义: 代数 A 的 非零. 有限生成

A模 为 半单模. 则 A称为半单代数

例. $|G|<+\infty$. $\mathrm{char}\,F=0$或 与 $|G|$ 互素,

则 由 Maschke.

$F[G]$ 是 半单代数

引理. A为半单代数 $\Leftrightarrow$ A作为A模为半单模

$\Rightarrow$ $\checkmark$

$\Leftarrow$ M. 有限生成 A 模

$M\cong A^n/\ker\varphi$

$A^n=\oplus A$. 为半单模 □

命题. A. 半单代数 A作为A模 $\cong S_1\oplus\cdots S_n$

S_i为单模. 则 $\forall$ 单的A模 同构于某 S_i

S 单模 $0\neq s\in S$

$\varphi: A\to S$ φ 满
$a\mapsto as$

令 $\varphi_i: S_i\to S$

$\exists\, i.$ $\varphi_i\neq 0$

$\therefore \varphi_i: S_i\to S$ 同构

命题 $\{S_1 \cdots S_r\}$ 为半单代数 A 的所有非同构单模集合. 对 A 模 M

若 $M \cong n_1 S_1 \oplus \cdots \oplus n_r S_r$. 则 $\{n_i\}_{i=1}^r$ 唯一确定

证 $\varphi: n_1 S_1 \oplus \cdots \oplus n_r S_r \xrightarrow{\sim} m_1 S_1 \oplus \cdots \oplus m_r S_r$

令 $\varphi_{ij}: n_i S_i \xrightarrow{\beta_i} n_1 S_1 \oplus \cdots \oplus n_r S_r \xrightarrow{\varphi} m_1 S_1 \cdots m_r S_r \xrightarrow{\alpha_j} m_j S_j$

$\because S_i \to S_j$ 为 0

$\therefore \varphi_{ij} = 0$

$\therefore \varphi = \bigoplus_{i=1}^r \varphi_{ii}$

$\therefore \varphi_{ii} \quad n_i S_i \to m_i S_i$ 同构

比较维数即证 □

定义: 若可除环 D 是 F 代数 (D 是单代数)

则 D 为 F-可除代数

$M_n(D)$ 为 D 上 n 阶矩阵

D^n 为 D 上 n 维向量

Thm. $M_n(D)$ 半单代数. 其单模均 $\cong D^n$

$M_n(D) \cong n D^n$

对 $v = (v_1 \cdots v_n)$ 非零

则 $\langle V \rangle = D^n$ □

定义: 代数只有平凡的双边理想 (即作为环是单环). 则称单代数

引理: 单代数 $\Rightarrow$ 半单代数

A 单代数. Σ 为 A 的单子模之和

对 S 为 A 单子模. $a \in A$

$\varphi: S \to Sa$ 形式上为满同态
$s \mapsto sa$

$\therefore Sa = 0$ 或 $Sa \cong S$ 为单模

$\therefore Sa \subset \Sigma$. $\Rightarrow \Sigma$ 为 A 的双边理想

$\therefore \Sigma = 0$ 或 A □

Thm. $M_n(D)$ 为单代数

线性代数 □

引理. $B^{op} \cong \mathrm{End}_B(B) = \mathrm{Hom}(B, B)$

$\mathrm{Hom}(B,B) \longrightarrow B^{op}$

$f \longmapsto f(1) = a$

$g(1) = b$, $f(1) = a$

$g(f(1)) = g(a) = ab = b \circ a$

$g \cdot f \longmapsto b \circ a$ □

引理 (1) S 是单模. $D = \mathrm{End}_A(S)$ 可除代数

且 $\mathrm{End}_A(nS) \cong M_n(D)$

(2) $S_1 \cdots S_r$ 互不相同单模

$U_i = n_i S_i$ 则

$\mathrm{End}_A(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r)$

证

D 可除环 $\Rightarrow$ D 可除代数.

$M_n(D)$ 元素 $\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_{ij}: S \to S$

$\varphi = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_{11}(s_1) + \cdots + \varphi_{1n}(s_n) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(s_1) + \cdots + \varphi_{nn}(s_n) \end{pmatrix}$

$M_n(D) \longrightarrow \mathrm{Hom}(nS, nS)$

$(\ ) \longmapsto \varphi$

若 $\varphi = 0 \Rightarrow$ 取 $s_j = 0$, $s_i \neq 0$

$\Rightarrow (\varphi_{1i}(s_i) \cdots \varphi_{ni}(s_i))^T = 0$

$\Rightarrow \varphi_{1i} = \cdots = \varphi_{ni} = 0$ 单.

对 $\Phi \in \mathrm{Hom}(nS, nS)$

设 $\Phi((0, \cdots 0, s_i, 0 \cdots 0)^T) = (\psi_{1i}(s_i), \cdots \psi_{ni}(s_i))^T$

$\Rightarrow$ 取 (ψ_{ij}) 即可.

故满

(2) $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$

$\varphi \downarrow \quad \downarrow \wr$ $\quad \varphi = \bigoplus_{i=1}^r \varphi_{ii}$

$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$

$\Rightarrow \varphi \cong \oplus \varphi_{ii}$ 再用 (1) 即得

对 F 代数闭域，$End_A(S) \cong F$

$\varphi \in End_A(S)$

λ_φ 为 φ 的特征值

∵ $\varphi - \lambda_\varphi Id$ 有 $Ker \neq 0$

⇒ $\varphi - \lambda_\varphi Id$ $Ker = S$

∴ $\varphi = \lambda_\varphi Id$

⇒ $\varphi \mapsto \lambda_\varphi$ 非 0，∴ 同构

Thm 韦德伯恩

代数 A 半单代数 ⇔ $A \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$

D_i 可除代数

证 ⇒

⇒ $A \cong \bigoplus_{i=1}^{r} n_i S_i$

$A^{op} \cong End_A(A) \cong M_{n_i}(End_A(S_i)) \oplus \cdots$

$A = (A^{op})^{op} \cong \oplus M_{n_i}(End_A(S_i)^{op})$

可除代数的反代数也是可除代数 □

命题 A_i 半单代数 $\{S_{i1}, \dots S_{it_i}\}$ 为 A_i 单模

则 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ 也是半单代数

其代表元 $\left\{ \hat{S_{ij}} = (0, \dots 0, S_{ij}, 0 \dots 0) \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le t_i \end{matrix} \right\}$

证 只需论 $n=2$

J 为 $A_1 \oplus A_2$ 的子模

视 $A_1 = A_1 \oplus \{0\}$　$A_2 = \{0\} \oplus A_2$

$J_i = J \cap A_i \subseteq A_i$ 子模

且 $J_1 \oplus J_2 \subseteq J$

另外 若 $(a_1, a_2) \in J$

则 $(1,0) \cdot (a_1, a_2) \in J$

⇒ $(a_1, 0) \in J_1$　同理 $(0, a_2) \in J_2$

故 $(a_1, a_2) \in J_1 \oplus J_2$

∴ $A_1 \oplus A_2$ 的子模有 $J_1 \oplus J_2$ 形式

且与这样形式的也是 $A_1 \oplus A_2$ 子模

∴ $A_1 \oplus A_2$ 的单子模形式 $S_1 \oplus 0$，$0 \oplus S_2$

∵ A_1, A_2 为自身单子模之和

⇒ $A_1 \oplus A_2$ 为其单子模之和 ⇒ $A_1 \oplus A_2$ 半单代数

而 $S_1 \oplus 0$，$0 \oplus S_2$ 不同构

否则 $\varphi(S_1, 0) = (0, S_2)$

$\varphi((1,0) \cdot (S_1, 0)) = (1,0)\,\varphi(S_1,0) = (1,0)(0,S_2) = 0$

□

推论

$A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots M_{n_r}(D_r)$ 为半单代数

则 A 的单子模同构类有 r 个

$S_i := D_i^{n_i}$ 为 $M_{n_i}(D_i)$ 唯一的单子模

则 $\{\hat{S_1}, \dots \hat{S_r}\}$ 为 A 的单子模代表元

$\hat{S_i} = \{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\} \oplus S_i \oplus \{0\} \oplus \cdots \{0\}$

当 F 代数闭时 $\dim_F \hat{S_i} = \dim_F S_i = n_i$

有限群的特征标理论

$F=\mathbb{C}$ $|G|<+\infty$ 为有限群

$\mathbb{C}[G]$ 利用马施克定理，可写成单模之和

$\mathbb{C}[G]\cong M_{f_1}[\mathbb{C}]\oplus\cdots\oplus M_{f_r}[\mathbb{C}]$

$D_i\cong\mathbb{C}$. （$\because$ $\mathbb{C}$ 是代数闭）

$V_i=\mathbb{C}^{f_i}$ $\dim_{\mathbb{C}}V_i=f_i$

$\Rightarrow \mathbb{C}[G]\cong f_1V_1\oplus\cdots\oplus f_rV_r$

其中 $\{V_1\cdots V_r\}$ 为其代表元。

并令 $V_1=\mathbb{C}$ 为平凡表示。$f_1=1$

$|G|=1+f_2^2+\cdots+f_r^2$.

Thm. r 为 G 的共轭类个数

设 Z 为 $\mathbb{C}[G]$ 的中心

一方面 $Z(\mathbb{C}[G])\cong\bigoplus_{i=1}^{r}Z(M_{f_i}[\mathbb{C}])$

而 $Z(M_{f_i}(\mathbb{C}))=\{\lambda I_{f_i}\mid\lambda\in\mathbb{C}\}\cong\mathbb{C}$

故 $Z(\mathbb{C}[G])\cong\mathbb{C}^r$

另一方面 设 $K_1,\cdots K_s$ 为 G 的所有共轭类

对 $x=\sum_{g\in G}\lambda_g g\in Z(\mathbb{C}[G])$

$\forall h\in G$

$hxh^{-1}=x$

$\Rightarrow \lambda_{hgh^{-1}}=\lambda_g$

即在一个共轭类的 g，其系数一致

$x=c_1\sum_{g\in K_1}g+c_2\sum_{g\in K_2}g+\cdots+c_s\sum_{g\in K_s}g$

$\Rightarrow$ 基为 $\{\sum_{g\in K_1}g,\cdots,\sum_{g\in K_s}g\}$

$\Rightarrow Z\cong\mathbb{C}^s$

$\Rightarrow r=s$ 为 G 中共轭类个数

(V,ρ) 为 G 的表示，V 的特征，

$\chi_V: G\to\mathbb{C}$.

$\chi_V(g)=tr(\hat{\rho}(g))=tr(\rho(g))$

$\hat{\rho}(g)$ 为 g 的作用在 V 上的矩阵表示，

注：即使 V 的基对 $\hat{\rho}$ 有影响

但 不同基之间，矩阵相似，$tr()$不变

对 $(V,\rho)\cong(V',\rho')$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ V' \arrow[r, "\rho'(g)"'] & V' \end{tikzcd}$$

$\rho'(g)=\varphi\,\rho(g)\,\varphi^{-1}$

$\therefore \chi_V(g)=\chi_{V'}(g)$

同构的表示具有相同的特征

由于 $\chi_V(g)=\chi_V(hgh^{-1})$

$\therefore$ χ_V 在 G 的共轭类上取值为常数

定义：$f: G\to\mathbb{C}$ 在共轭类上取值为常数

则称 f 为类函数

类函数构成 r 维线性空间 CL

命题. (V,ρ) 是 G 的 n 维表示，g 为 G 的 m 阶元

(1) $\rho(g)$ 可对角化，特征值为 m 次单位根

(2) $\chi_V(g)$ 是 n 个 m 次单位根之和.

(3) $\chi_V(g^{-1})=\overline{\chi_V(g)}$

(4) $|\chi_V(g)|\le n$

(5) $\{g\in G\mid\chi_V(g)=n\}$ 为 G 的正规子群.

证 (1) $g^m=1$. $\rho(1)=Id.=\rho(g)^m$

(2) 由(1) 即可

(3) 对 λ 为 $\rho(g)$ 特征值 $|\lambda|=1\Rightarrow\lambda^{-1}=\bar{\lambda}$

$\Rightarrow \chi_V(g^{-1})=\sum\lambda^{-1}=\sum\bar{\lambda}=\overline{\chi_V(g)}$

(5) $\rho: G\to GL(V)$

$\ker\rho=\{g\mid\rho(g)=Id\}=\{g\mid\chi_V(g)=n\}$

为 G 的正规子群

命题. U, V 为 G 的两个表示

(1) $\chi_{U\oplus V} = \chi_U + \chi_V$

(2) $\chi_{U\otimes V} = \chi_U \cdot \chi_V$

(3) $\chi_{U^*} = \overline{\chi_U}$ $(U^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C}))$

(4) $\chi_{\mathrm{Hom}(U,V)} = \overline{\chi_U} \cdot \chi_V$

(1) 取 U 的基 $\{e_1 \cdots e_m\}$,

V 的基 $\{f_1 \cdots f_n\}$

$\{e_1\oplus 0, \cdots e_m\oplus 0, \quad 0\oplus f_1, \cdots 0\oplus f_n\}$

$$\rho_{U\oplus V}(g) = \begin{pmatrix} \rho_U(g) & 0 \\ 0 & \rho_V(g) \end{pmatrix}$$

(2) $e_i\otimes f_j$ 为 $U\otimes V$ 的基

$g.(e_i\otimes f_j) = g.e_i \otimes g.f_j$

$= \lambda_i e_i \otimes \lambda_j' f_j$

$\Rightarrow tr(\ ) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j' = tr\,\rho(g)\,tr\,\rho'(g)$

(3) $\{e_1 \cdots e_m\}$ 为 U 的基.

$\{e_1^*, \cdots e_m^*\}$ 为 U^* 的对偶基

$\rho_U(g)\, e_i = \lambda_i e_i$

$(g e_i^*)(e_j) = g\, e_i^*(g^{-1} e_j)$

$= g(\lambda_j^{-1} \delta_{ij}) = \lambda_j^{-1}\delta_{ij}$

(g 在 $\mathbb{C}$ 上平凡作用)

$\therefore \chi_{U^*} = \overline{\chi_U}$

(4) $U^*\otimes V \to \mathrm{Hom}(U,V)$

$\varphi\otimes v \longmapsto \varphi(u)\cdot v$

单. 且 左右维数相等. 故同构

$\Rightarrow \chi_{\mathrm{Hom}(U,V)} = \chi_{U^*\otimes V} \cdots$

推论. 群 G 的任意表示 V 的特征 χ_V 是不可约特征 $\chi_i = \chi_{V_i}$ 的非负线性组合

对类函数 定义 内积

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\alpha(g)}\,\beta(g)$$

是复线性空间 的内积

(1) $(\alpha,\alpha) \geq 0 \quad \forall\, \alpha\in CL$ 成立 $\;=0 \Leftrightarrow \alpha$

(2) $(\alpha,\beta) = \overline{(\beta,\alpha)}$

(3) $(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2, \beta) = \lambda(\alpha_1,\beta) + \mu(\alpha_2,\beta)$

注. $\alpha = \sum \alpha_i C_i$

C_i 在第 i 个共轭类上 取值为 1

在其它 取值为 0

引理. V 是 G 的复表示,

$V^G = \{v\in V \mid g.v = v \quad \forall g\in G$ 成立$\}$

则 $\dim_{\mathbb{C}} V^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$

证. 取 $a = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$

则 $ga = a$

则 $a^2 = a$

则 $\rho_a: V \to V$

$v \mapsto a.v$

有 $\rho_a^2 - \rho_a = 0$

则 ρ_a 可对角化且 至多 两个特征值

记 $V = V_1 \oplus V_0$

V_1 为 特征为 1 的 特征子空间

下证 $V_1 = V^G$

"$\subseteq$" $v\in V_1 \quad av = v$

$\Rightarrow gv = g\,av = ga\,v = av = v$

"$\supseteq$" 显然.

$\therefore tr(\rho_a) = \dim_{\mathbb{C}} V_1 = \dim_{\mathbb{C}} V^G$

$\| $

$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} tr(\rho_g)$

定理 U, V 为 G 的复表示，则

$$(\chi_U, \chi_V) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U, V)$$

证明. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U,V) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)$

对 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U,V)$

$(g.\varphi)(u) = g\varphi(g^{-1}u) = gg^{-1}\varphi(u) = \varphi(u)$

$\therefore \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)^G$

即有 $\subseteq$. 而 $\supseteq$ 显然成立

故 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U,V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)^G$

由引理. $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U,V)$

$= \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)^G$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)}(g)$

$= \frac{1}{|G|}\sum \chi_U(g)\chi_V(g)$

$= (\chi_V, \chi_U)$

$\therefore (\chi_U, \chi_V) = \overline{(\chi_V, \chi_U)} = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(U,V)$ □

Thm $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ 是 CL 内积空间的标准正交基. 则

每个特征 χ_V 写成 $\chi_1, \ldots, \chi_r$ 的非负整系数线性组合方式唯一.

表示 V 由其特征 χ_V 唯一决定

证. 这只需证 $(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$

由 舒尔引理

$(\chi_i, \chi_j) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_i, V_j) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ □

注：$\dim V^G = n_1 = (\chi_V, \chi_1) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)\overline{\chi_1(g)}$

注意到 χ_1 为平凡表示 $\chi_1(g) = 1$

$\Rightarrow \dim V^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$

(引理的快速证明)

特征标表：

$|G| < +\infty$. 共轭类 $K_1 = \{1\}, \ldots K_r$.

其中 K_i 的阶为 k_i，g_i 为其代表元

G 的不可约表示集合为 $\chi_1, \cdots \chi_r$

其中 χ_1 为主特征

特征标表 χ

	1	k_2 g_2	$\cdots$
χ_1	1	1	$\cdots$ 1
$\vdots$	f_2		$\chi_i(g_j)$
χ_r	f_r		

Thm. 行正交关系

$(\chi_i, \chi_j) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)}$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{t=1}^{r} k_t \chi_i(g_t)\overline{\chi_j(g_t)} = \delta_{ij}$

推论 $\alpha = \sum a_i\chi_i$. $\beta = \sum b_i\chi_i$ 均为类函数

$\Rightarrow (\alpha, \beta) = \sum a_i \overline{b_i}$

推论. 若 $n_i = (\chi_V, \chi_i)$

则 $\chi_V = \sum n_i \chi_i$

$V \cong \bigoplus_{i=1}^{r} n_i V_i$

$(\chi_V, \chi_V) = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$

推论 $n \le 3$. α 为 G 的特征

$(\alpha, \alpha) = n \iff \alpha$ 为 n 个互异不可约特征之和

$((\alpha, \alpha) = \sum n_i^2 \le 3 \Rightarrow n_i = 0$ 或 1.)

命题 若 α 为线性特征、χ 为不可约特征

$\Rightarrow \alpha\chi$ 为不可约特征

证. 只需证 $(\alpha\chi, \alpha\chi) = 1$

$= \frac{1}{|G|}\sum \alpha(g)\chi(g)\overline{\alpha(g)\chi(g)}$

$= \frac{1}{|G|}\sum \alpha(g)\chi(g)\alpha(g)^{-1}\overline{\chi(g)}$

$= \frac{1}{|G|}\sum \chi(g)\overline{\chi(g)} = (\chi, \chi) = 1$

Thm. 列正交关系

$$\sum_{t=1}^{r} \chi_t(g_i)\overline{\chi_t(g_j)} = \frac{|G|}{k_i}\delta_{ij}$$

证. 记 $\mathcal{X} = (\chi_i(g_j))_{r\times r}$

由行正交关系.

$$\mathcal{X}\cdot\begin{pmatrix}\frac{k_1}{|G|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{k_r}{|G|}\end{pmatrix}\overline{\mathcal{X}}^T = I_r$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\frac{k_1}{|G|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{k_r}{|G|}\end{pmatrix}\overline{\mathcal{X}}^T\mathcal{X} = I_r$$

展开即为所求 □

计算实例.

(1) 循环群. $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 为 Abel 群

设 ζ_n 为 n次本原单位根. $g\in G$为生成元

令 $\chi: G\to \mathbb{C}^\times$. $g\mapsto \zeta_n$

则 χ^i 为 G 的 n个不同的线性特征

又 $r=n$. 故 n个不可约特征即为 χ^i $(0\le i\le n-1)$

其中 $\chi^i(g^j) = \zeta_n^{ij}$

(2) 有限 Abel 群.

$G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$

共 $|G|$ 个共轭类 $f_i=1$

即不可约特征都是线性特征.

即为 $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^\times)$ 的元素.

如令 $G = \langle g_1\rangle\times\cdots\times\langle g_s\rangle$ g_i的阶为n_i

则 G 的线性特征可写成

$$\chi_{i_1,\cdots,i_s}: g_1^{t_1}\cdots g_s^{t_s} \mapsto \zeta_{n_1}^{i_1t_1}\cdots\zeta_{n_s}^{i_st_s}$$

有限群的直积

$G = G_1\times G_2$.

χ 为 G_1 的不可约特征

对应表示为 V_χ

ψ 为 G_2 的 ~

对应表示为 V_ψ

则 G 如下作用于 $V_\chi\otimes_{\mathbb{C}} V_\psi$

$(g_1,g_2)(v_1\otimes v_2) = (g_1v_1)\otimes(g_2v_2)$

从而 $V_\chi\otimes V_\psi$ 为 G-表示,

其特征 $\alpha(g_1,g_2) = \chi(g_1)\psi(g_2)$

由 $$(\alpha,\alpha) = \frac{1}{|G_1\times G_2|}\sum_{(g_1,g_2)\in G}\chi(g_1)\psi(g_2)\overline{\chi(g_1)}\overline{\psi(g_2)}$$

$$= \frac{1}{|G_1|}\sum_{g_1\in G_1}\chi(g_1)\overline{\chi(g_1)}\cdot\frac{1}{|G_2|}\sum(\ldots)$$

$$= (\chi,\chi)\cdot(\psi,\psi) = 1$$

故. α为G的不可约特征

若 $(\chi,\psi)\ne(\chi',\psi')$

则 $(\alpha(\chi,\psi),\alpha(\chi',\psi')) = 0$

再设 G_1 的不可约特征为 $\{\chi_1,\cdots\chi_r\}$.

G_2的~ 为 $\{\psi_1,\cdots\psi_s\}$

则 $\{\alpha(\chi_i,\psi_j)\}$ 为 $r\cdot s$个不可约特征

再注意到 G_1 有 r个共轭类

G_2 有 s个 ~

则 $G=G_1\times G_2$ 有 $r\times s$ 个共轭类

$\Rightarrow$ 上面即为所有不可约特征

例. $S_n \curvearrowright \{e_1 \cdots e_n\}$, $V = \langle e_1, \cdots, e_n \rangle$

$V_1 = \langle \sum e_i \rangle$. $V = V_1 \oplus W$

W是不可约表示.

$(n=3)$: $\chi_V(g) = \begin{cases} 3 & (g=1) \\ 1 & g=(12) \\ 0 & g=(123) \end{cases}$

$\Rightarrow \chi_W(g) = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$ $\quad (\chi_V = \chi_W + \chi_{V_1})$

$\Rightarrow (W, W) = \frac{1}{6}(4 + 0 + 1^2 \times \underset{\uparrow \text{共轭类个数}}{2}) = 1$ □

例. 正则表示 $\mathbb{C}[G]$

$\chi_G(g) = \begin{cases} |G| & (g=1) \\ 0 & (g \neq 1) \end{cases}$ ←检出现 $h \cdot g = \lambda g$ 情况

(例. $\rho g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $G = \{1, g, g^2\}$)

例. S_3的特征标表.

$K_1 = \{1\}$, $K_2 = \{(12), (23), (13)\}$.

$K_3 = \{(123), (132)\}$

共三个共轭类. 故 $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 6$

$\Rightarrow f_1 = f_2 = 1$. $f_3 = 2$.

$\rho: S_n \to \{\pm 1\} \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$

$\sigma \longmapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$ 奇偶轮换

此线性特征即 χ_2.

$\chi_2(12) = -1$. $\chi_2(123) = 1$

$\because$ χ_3, $\chi_2 \cdot \chi_3$ 均为 S_3 的2维不可约特征

$\Rightarrow \chi_3 = \chi_2 \chi_3 \Rightarrow \chi_3(12) = 0$

根据行正交关系, $\chi_3(123) = -1$

	1	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

S_4的特征标表

5个共轭类: 1, (12)(34) (3个), (123) (8个), (12) (6个), (1234) (6个)

$1 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + f_5^2 = 24$

$\Rightarrow f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 3$

χ_2(偶) $= 1$. χ_2(奇) $= -1$.

由于 χ_3 是唯一的2维不可约特征

$\Rightarrow \chi_2 \chi_3 = \chi_3$ 由此可求出 χ_3.

考虑4维表示 $X = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. $V = \mathbb{C}[X]$

$\chi_V(g) = \begin{cases} 4 & g=1 \\ 0 & g=(12)(34) \\ 1 & g=(123) \\ 2 & g=(12) \\ 0 & g=(1234) \end{cases}$

$(\chi_V - \chi_1)(g) = \begin{cases} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$

由 $(\chi_V - \chi_1, \chi_V - \chi_1) = 1 \Rightarrow$ 不可约

由第一项为3. $\Rightarrow$ 维数为3 $\Rightarrow$ 不妨设为 χ_4

$\Rightarrow \chi_2 \chi_4 = \chi_5$

故

	1	(12)(34)	(123)	(12)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

A5 的 特征标表.

共轭类 . 1. $\overset{15个}{(12)(34)}$, $\overset{20个}{(123)}$ $\overset{12个}{(12345)}$. $\overset{12个}{(13452)}$

由于 A5是单群 ⇒ $Hom(A_5, C^\times)=\{1\}$

⇒ $f_2 \neq 1$

⇒ $1+f_2^2+f_3^2+f_4^2+f_5^2=60$ 有唯一解

$f_2=3$、$f_3=3$. $f_4=4$. $f_5=5$

$X=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ $C[X]=V$

$$\chi_V(g)=\begin{cases}5 & (g=1)\\ 1 & (g=(12)(34))\\ 2 & (g=(123))\\ 0 & (g=(12345))\\ 0 & (g=(13452))\end{cases}$$

$$\Rightarrow (\chi_V-\chi_1)(g)=\begin{cases}4\\0\\1\\-1\\-1\end{cases}$$

由 ⇒ $(\chi_V-\chi_1, \chi_V-\chi_1)=1$ 由 为4.

⇒ $\chi_V-\chi_1=\chi_4$ 可求出 χ_4

考虑 $Y=\{\{i,j\} \mid \{i,j\}\subseteq X\}$

$U=C[Y]$ 为 10维表示 (C_5^2)

$$\chi_U(g)=\begin{cases}10 & g=1\\ 2 & g=(12)(34)\\ 1 & g=(123)\\ 0 & g=(12345)\\ 0 & g=(13452).\end{cases}$$

由 $(\chi_4, \chi_U)=3$. ⇒ 为 3个不可约之和

由 $(\chi_U, \chi_1)=1$

⇒ $\chi_U=\chi_1+\chi_4+\chi_5$ 可求出 χ_5

	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(13452)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	$a=-1$	$c=0$	e	f
χ_3	3	$b=-1$	$d=0$		
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

列 $\begin{cases}1+3a+3b+0+5=0\\ 1+a^2+b^2+1=\frac{60}{15}\end{cases}$

列 $\begin{cases}1+3c+3d+4-5=0\\ 1+c^2+d^2+1+1=\frac{60}{20}\end{cases}$

行 $\begin{cases}3-1\times15+e\cdot12+f\cdot12=0\\ 9+15+e^2\cdot12+d^2\cdot12=60\end{cases}$

⇒ $e=\frac{1+\sqrt5}{2}$. $f=\frac{1-\sqrt5}{2}$. 同理可求下行

特征标表的性质和应用

$\varphi: G \twoheadrightarrow (G/N)=H$

(V, ρ) 为 H 的表示

则 $\varphi^*\rho=\rho\circ\varphi$

$(V, \varphi^*\rho)$ 为 G 的表示

注若 (V,ρ) 为 H 的不可约 —
对 φ 非满射, $(V,\varphi^*\rho)$ 不一定 为 G 的不可约表示

例. (1) φ 为平凡映射

$\varphi(g)=1_H$

则无论 ρ 为何种表示

$\varphi^*\rho$ 为平凡表示

(2) φ 为群同构.

则两种表示同构

(3) φ 为满 $(H=G/N)$

则 (V,ρ) 不可约 ⇒ $(V,\varphi^*\rho)$ 不可约

证1. (V,ρ) 下 不存在 真子表示 W

⇒ $(V,\varphi^*\rho)$ 下 也不存在 ..

证2. 计算 $(\chi_V, \chi_V)=1$

$\mathbb{C}[G/N]$ 看成 G/N 的 正则表示

$\mathbb{C}[G/N] = \bigoplus n_i V_i$

$\varphi^*\mathbb{C}[G/N]$ 看成 G 的表示

$= \bigoplus n_i \varphi^* V_i$

$N = \ker\varphi$.

$\chi_i(N) = \chi_i(I) = \dim V_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_{\varphi^*\mathbb{C}[G/N]}(g) = \#(G/N) = \chi(1) & (g \in N) \\ \chi_{\varphi^*\mathbb{C}[G/N]}(g) = 0 & (g \notin N) \end{cases}$$

(利用 已知 $\chi_{\mathbb{C}[G]}(g) = \begin{cases} \#G & (g=1) \\ 0 & (g \neq 1) \end{cases}$)

(正则表示的核: $N_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$

定义: 对于 G 的表示 (W, α) 平凡

$G \xrightarrow{\alpha} GL(W)$

$\ker\alpha \lhd G$.

$\ker\alpha = \{g \mid \chi_W(g) = \chi_W(1)\}$

$= \{g \mid \alpha(g) = \mathrm{Id}\}$

"$\Rightarrow$" 设 $\alpha(g)$ 对角化成 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

则 $n = \chi_W(g) = \sum \lambda_i \Rightarrow \lambda_i = 1$

"$\Leftarrow$" 是显然的 □

G 上 $W_1, \dots W_r$ 为 G 的不可约表示,

$\alpha_1 \dots \alpha_r$ 为对应的映射

$N_i = \ker\alpha_i$. 其中 W_1 为平凡表示

$N_1 = G$

$(N_i = G \Leftrightarrow i = 1)$

注: $\bigcap_{i=1}^{r} N_i = \{1\}$

$g \in \bigcap N_i$. $\chi_{W_i}(g) = \chi_{W_i}(1)$

又 $\mathbb{C}[G] = \bigoplus f_i W_i$

$\Rightarrow \chi_{\mathbb{C}[G]}(g) = \chi_{\mathbb{C}[G]}(1) = \#G$

$\Rightarrow g = 1$. □

Thm $N \lhd G$ 则 $N = \bigcap_{i \in I} N_i$. $I \subseteq \{1 \dots r\}$

证. 设 $U = \mathbb{C}[G/N]$. ψ 为 U 作为 G/N 表示的特征

χ 为 U 作为 G 表示的特征

由于正则表示 核平凡

故 $\chi(g) = \chi(1) \Leftrightarrow g \cdot N = 1 \cdot N$

即 $g \in N \Rightarrow N_\chi = N$

记 $\chi = \sum_{i \in I} a_i \chi_i$ 其中 $a_i > 0$

则 $|\chi(g)| \leq \sum_{i \in I} a_i |\chi_i(g)| \leq \sum_{i \in I} a_i \chi_i(1) = \chi(1)$

故 $g \in N_\chi \Leftrightarrow \forall i \in I \ \chi_i(g) = \chi_i(1)$

$\Leftrightarrow g \in N_i \Rightarrow N = N_\chi = \bigcap_{i \in I} N_i$ □

例子. 利用 $S_4/K_2 \cong S_3$

可得到 S_4 的信息, S_3 的信息

S_4 正规子群

$K_2 = \{1, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$

S_3.

1	3	2
1	(12)	(123)
1	1	1
1	-1	1
2	0	-1

S_4

1	3	8	6	6
1	(12)(34)	(123)	(12)	(1234)
1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1
2	2	-1	0	0

(1) 已知 $S_3 \Rightarrow S_4$

S_4 的 (12) 列. 与 S_3 (12) 列相同

$(1234) \in (12)K_2 \Rightarrow$

$(12)(34) \in N = 1 \cdot N \Rightarrow$ 与第一列相同

(123) 与 S_3 (123) 相同

(2) 已知 $S_4 \Rightarrow S_3$

(3) 已知 $S_4 \Rightarrow S_4$ 的 正规子群

① 第一行 为 G 本身

② 第二行 为 $\{1, (12)(34)$ 及其共轭, (123) 及其共轭$\}$

③ 第三行 为 $\{1, (12)(34)$ 及其共轭$\}$

(找与 $\chi_{W_i}(1)$ 相同的元素)

(4) 已知 $S_4 \Rightarrow S_4$ 的中心

定义 χ 为 G 的特征

$Z_\chi = \{ g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1) \}$

$(Z_i = Z_{\chi_i})$

(1) Z_χ 为 G 子群

(2) $\chi = \chi_i$ 不可约 则 $Z_i/N_i = Z(G/N_i)$

(3) $Z(G) = \bigcap_{i=1}^{r} Z_i$

引理：$g \in Z_\chi \Leftrightarrow \rho(g) = \lambda_g \mathrm{Id}$

这是因为 $\chi(g)$ 是 $\chi(1)$ 个单位根之和。

(1) 故 $\rho(gh^{-1}) = \lambda_g \lambda_h^{-1} \mathrm{Id}$

$gh^{-1} \in Z_\chi$

(2) 对 $\bar{g} \in Z(G/N_i)$

$\forall x \in G \quad \rho(g)\rho(x) = \rho(x)\rho(g)$

$\rho(g)$ 与其它交换

又 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V_i) \cong \mathbb{C}$.

$\Rightarrow \rho(g) = \lambda_g \mathrm{Id} \Rightarrow \bar{g} \in Z_i/N_i$

另一方向包含是显然的

(3) $\forall i \quad Z(G)N_i/N_i \leq Z(G/N_i)$

$\Rightarrow Z(G) \leq Z_i$ 对 $\forall i$ 成立

反之，若 $g \in Z_i \ \forall i$.

则由 $Z_i/N_i = Z(G/N_i)$

$\forall x \in G$

$gxg^{-1}x^{-1} \in N_i \Rightarrow gxg^{-1}x^{-1} \in \bigcap_{i=1}^{r} N_i = \{1\}$

$\Rightarrow gx = xg \Rightarrow g \in Z(G) \quad \square$

由此 只需计算 Z_i（模长 $= \chi(1)$ 的）

即可计算 $Z(G)$

伯恩赛德：

$p^a q^b$ 阶群为可解群.

(p, q 为不同的素. $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

(更一般地. 奇数阶有限群为可解群)

$H \le G$. $G = g_1H \sqcup g_2H \sqcup \cdots \sqcup g_mH$

V 为 H 表示

则 $F[G]\otimes_F V$ 为 F 线性空间

$\dim_F(\quad) = |G|\cdot\dim_F V$

$g(x\otimes v) = gx\otimes v$

定义 诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G V = (F[G]\otimes V)/Y$

其中 Y 由 $gh\otimes v - g\otimes hv$ 生成

Y 是 $F[G]\otimes V$ 的 $F[G]$ 子模

若 $gg_i = g_l\cdot h$ 则 $g(g_i\otimes e_j) = g_l\otimes h(e_j)$

引理. $\mathrm{Ind}_H^G V$ 作为 F 线性空间

维数 $= \frac{|G|}{|H|}\cdot\dim_F V$

若 V 有基 $\{e_1,\dots,e_n\}$

则 $\mathrm{Ind}_H^G V$ 的基为 $\{g_i\otimes e_j \mid {1\le i\le m \atop 1\le j\le n}\}$

$h\in H$.

$h(e_j) = \sum_k a_{jk}(h)e_k$

令 $a'_{jk}(g) := \begin{cases} a_{jk}(g) & g\in H \\ 0 & g\notin H\end{cases}$

$g(g_i\otimes e_j) = g_l\otimes h(e_j)$

$= g_l\otimes\sum_k a_{jk}(h)e_k$

$= \sum_s\sum_k a'_{jk}(g_s^{-1}gg_i)\, g_s\otimes e_k$

$g_s^{-1}gg_i = h$ 时有值. 否则为 0

注 固定 i: $\{g_1^{-1}gg_i, g_2^{-1}gg_i, \dots, g_m^{-1}gg_i\}$ 中仅有一个元素 $\in H$

g 在该基下的矩阵 即为:

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
(i,j) & 11 & 12 & \cdots & 1n & 21 & 22 & \cdots & 2n & \cdots & mn \\
\hline
11 & a'_{11}(g_1^{-1}gg_1) & & & & & & & & & \\
12 & & a'_{22}(g_1^{-1}gg_1) & & & & & & & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & & & & \\
1n & & & & a'_{nn}(g_1^{-1}gg_1) & & & & & & \\
21 & & & & & a'_{11}(g_2^{-1}gg_2) & & & & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & \\
mn & & & & & & & & & & a'_{nn}(g_m^{-1}gg_m)
\end{array}$$

设 χ 为 H 表示特征.

χ^G 为 $\mathrm{Ind}_H^G V$ 表示的特征

$\chi^G(g) = \sum_i\sum_j a'_{jj}(g_i^{-1}gg_i)$

$= \sum_{1\le i\le r,\ g_i^{-1}gg_i\in H}\chi(g_i^{-1}gg_i)$

推论. $\sum_{x\in G,\ x^{-1}gx\in H}\chi(x^{-1}gx) = \sum_{1\le i\le m}\sum_{x\in g_iH}\sum_j a'_{jj}(x^{-1}gx)$

$= \sum_{1\le i\le m}|H|\sum_j a'_{jj}(g_i^{-1}gg_i)$

$= |H|\,\chi^G(g)$

即 $\chi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G,\ x^{-1}gx\in H}\chi(x^{-1}gx)$

命题. χ 为 H 的特征 对 $g\in G$. s 为 g 所在的 G 中共轭类中 H 共轭类的个数

若 $s=0$ 则 $\chi^G(g)=0$

若 $s>0$ 则设 l 为 g 所在的 G 共轭类元素个数. 设 $h_1,\dots,h_s$ 为这 s 个 H 共轭元的代表元

设 $k_1,\dots,k_s$ 为共轭类中元素个数

则 $\chi^G(g) = \sum_{i=1}^s\frac{|Z_G(g)|}{|Z_H(h_i)|}\chi(h_i) = \sum_{i=1}^s (G:H)\frac{k_i}{l}\chi(h_i)$

证. $s=0$, 则不存在 $x\in G$, $x^{-1}gx\in H$. 由上推论 $=0$

$s>0$. 取 $X_i = \{x\in G \mid x^{-1}gx\in H,\ x^{-1}gx 与 h_i 共轭\}$

则 $\coprod_{i=1}^s X_i = \{x\in G \mid x^{-1}gx\in H\}$

故 $\chi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G,\ x^{-1}gx\in H}\chi(x^{-1}gx) = \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^s\sum_{x\in X_i}\chi(x^{-1}gx)$

$= \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^s|X_i|\,\chi(h_i)$ 故只需求 $|X_i|$ 即可

设 $t_i^{-1} g t_i = h_i$. 则对于 $c \in Z_G(g)$. $h \in H$

$(ct_ih)^{-1} g (ct_ih) = h^{-1}h_ih$ 在 h_i所在的H共轭类中

故 $Z_G(g)t_iH \subseteq X_i$

另一面, 若 $x \in X_i$ 则 $\exists h \in H$

$x^{-1}gx = h^{-1}h_ih = (t_ih)^{-1}g(t_ih)$

$\Rightarrow xh^{-1}t_i^{-1} \in Z_G(g) \Rightarrow x \in Z_G(g)t_ih$

$\Rightarrow X_i = Z_G(g)t_iH$

因此

$$|X_i| = |Z_G(g)t_iH| = \frac{|Z_G(g)|\cdot|t_iHt_i^{-1}|}{|Z_G(g)\cap t_iHt_i^{-1}|} = \frac{|Z_G(g)|\cdot|H|}{|H\cap t_i^{-1}Z_G(g)t_i|}$$

但 $t_i^{-1}Z_G(g)t_i = Z_G(t_i^{-1}gt_i) = Z_G(h_i)$

$H \cap Z_G(h_i) = Z_H(h_i)$

因此第一个等式得证.

再由 $|Z_G(g)| = \frac{|G|}{\lambda}$. $|Z_H(h_i)| = \frac{|H|}{k_i}$

故命题得证

定义限制表示: U 为 G 的F表示

U 可视为 F[H]-模. 记为 $Res^G_H U$

称为 U 在 H 上的限制表示

Thm. 以下作为 F-线性空间同构

$$Hom_{F[H]}(V, Res^G_H U) \cong Hom_{F[G]}(Ind^G_H V, U)$$

$\varphi \in$ $f_\varphi: F[G]\times V \to U$

$(g,v) \mapsto g\varphi(v)$

$\Rightarrow$ 诱导 $\tilde{\varphi}: F[G]\otimes V \to U$

再由 $Y \in \ker\tilde{\varphi}$

$\Rightarrow$ 诱导 $\Gamma(\varphi): Ind^G_H V \to U$

若 $\Gamma(\varphi)=0$ 取 $g=1$

$\Rightarrow \Gamma(\varphi)(1\otimes v) = \varphi(v) = 0$

$\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \Gamma$ 单

对 $\theta: Ind^G_H V \to U$

令 $\varphi: V \to Res^G_H U$ $v \mapsto \theta(1\otimes v)$

$\therefore \Gamma$ 为满 $\Rightarrow$ 同构 □

Thm $(\varphi, \chi|_H)_H = (\varphi^G, \chi)_G$

由 $(\varphi, \chi|_H)_H = \dim_{\mathbb{C}} Hom_{\mathbb{C}[H]}(V, Res^G_H U)$

$(\varphi^G, \chi)_G = \dim_{\mathbb{C}} Hom_{\mathbb{C}[G]}(Ind^G_H V, U)$

□

利用特征标表确定 ψ^G

S_3	1 1	3 (12)	2 (123)
ψ_1	1	1	1
ψ_2	1	-1	1
ψ_3	2	0	-1

S_4	1 1	3 (12)(34)	8 (123)	6 (12)	6 (1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	-1

$(\psi_1^G, \chi_1)_G = (\psi_1, \chi_1|_H)_H$

$= \frac{1}{6}(1+2+3) = 1$

$(\psi_1^G, \chi_2)_G = (\psi_1, \chi_2|_H)_H = 0$

$(\psi_1^G, \chi_3)_G = (\psi_1, \chi_3|_H)_H = 0$

$(\psi_1^G, \chi_4)_G = (\psi_1, \chi_4|_H)_H = 1$

$(\chi_4|_H = \psi_1 + \psi_3)$

$(\psi_1^G, \chi_5)_G = (\psi_1, \chi_5|_H) = 0$

$\chi_5|_H = \psi_2 + \psi_3$

$\Rightarrow \psi_1^G = \chi_1 + \chi_4$