Ch2.

1. 诺特环:

(1) 升链条件成立 ⟺ (2) 所有理想有限生成

⟺ (3) R中理想构成的非空理想集合中有极大元

例 1. 域 k 诺特. ∵ 理想有限生成

2. 主理想整环 ✓

3. $k[x_1,\cdots,x_n]$ ✓. $k[x_i]$ 无限 不是

4. $k + xk[x,y]$ 不是

$(xy) \subsetneq (xy, xy^2) \subsetneq (xy, xy^2, xy^3) \subsetneq \cdots$

5. $[a,b]$ 上连续函数构成的环 $C[a,b]$ 不是诺特:

$x_n = \frac{b-a}{n}$

$I_i = [a, a+x_i]$. 设 $I(I_i)$ 为在 I_i 上 $=0$ 的连续函数

$\Rightarrow I(I_1) \subsetneq I(I_2) \subsetneq \cdots$

6. $\{X \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ 不是诺特. (X 无限集)

推论: R 诺特, $I \subsetneq R$. 则 R/I 诺特环

证: R/I 的理想为 J/I $(I \subset J \subset R)$

由 J 有限生成 $\Rightarrow$ J/I 有限生成

希尔伯特基定理.

R 诺特 $\Rightarrow$ $R[x]$ 诺特.

诺特模: (1) 子模有限生成

(2) 升链稳定

(3) 子模集合中有极大元

命题. (1). M 诺特模 $\Rightarrow$ 子模, 商模 诺特模

(2) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 正合. M', M'' 诺特 $\Rightarrow$ M 诺特

(1) $M' \subset M$. M' 的子模即 M 的子模 $\Rightarrow$ 有限生成

$\overline{M'}$ 为 M/N 的子模

$\Rightarrow \overline{M'} = M'/N$ (对应定理)

$\Rightarrow \overline{M'}$ 有限生成

(2) 取 $N \subseteq M$, $N' = N \cap M'$, $N'' = N/N' \cong (N+M')/M' \subseteq M''$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d, hook] & N \arrow[r] \arrow[d, hook] & N'' \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

∵ M', M'' 诺特 $\Rightarrow$ N', N'' 有限生成 $\Rightarrow$ N 有限生成 □

推论. 诺特模的有限直和是诺特模.

$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$

推论 $M = N + N'$. 若 N, N' 诺特模 $\Rightarrow$ M 诺特模

$f: N \times N' \to M$ 满 $\Rightarrow M \cong N \times N' / \ker f$

推论 M 有限生成 R 模. 是 诺特模.

$R^n \to M$. □

Artin环，模

降链条件 ⟺ 非空集合族有极小元

命题. R Artin环 M 有限生成 R-模

则 M 为 Artin 模

$0 \to \ker \to R^n \to M \to 0$. 而 R^n 为 Artin 模

例. 域 k. k-线性 M

M 是 Artin 模 ⟺ M 诺特模 ⟺ M 有限维 k-线性空间

命题. 若 R. Artin Rig

(1) R 中只有有限多极大理想.

(2) $R/m_1 \cap \cdots \cap m_n \cong R/m_1 \times \cdots \times R/m_n$

(3) R 中素 ⟺ 极大. $J = m_1 \cap \cdots \cap m_n = nil(R)$

且 ∃ 充分大 k. $J^k = 0$

(4) $R \cong R/m_1^k \times \cdots \times R/m_n^k$

且 R/m_i^k 为 Artin 环. 有唯一极大理想 m_i/m_i^k

(5) Artin环是诺特环

Pf: (1) 反证. $m_1, \ldots$

由 $m_1 \cap \cdots \cap m_n \supsetneq m_1 \cap \cdots \cap m_{n+1}$

(取 $x_i \in m_i \Rightarrow \prod_{i=1}^n x_i \in m_i$. 但 $\prod_{i=1}^n x_i \notin m_{n+1}$)

(2) ∵ $m_i + m_j = (1)$ □

(3) $J \supseteq J^2 \supseteq \cdots$

∃k. $J^k = J^{k+1}$ 若 $\neq 0$

$\Sigma = \{ I \subseteq R \mid IJ^k \neq 0 \}$. $J \in \Sigma$. 非空

⟹ Σ 极小元 $I_0 \neq 0$ ⟹ ∃$x \in I_0$. $xJ^k \neq 0$

⟹ $(x) = I_0$ $x(xJ)(J^k) = xJ^k \neq 0$

⟹ $xJ \subseteq (x)$ ⟹ $xJ = (x) = I_0$

⟹ $J(x) = (x)$ $\overset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow} (x) = 0$

⟹ $J \subseteq nil(R)$

⟹ $\cap m_i \subseteq \cap p_i \subseteq \cap m_i$ ⟹ $J = nil(R)$

⟹ 取 p. $p/J \subseteq R/J \cong R/m_1 \times \cdots \times R/m_n$

⟹ $R/p \cong \dfrac{R/J}{p/J}$ 是 子环 且 整环

∴ R/p 是 R/m_i ⟹ $p = m_i$

(4) 可证 $m_i^k + m_j^k = (1)$

且 $x_i + x_j = 1$ ⟹ $1 = \sum_{t=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{t} x_i^t x_j^{2k-1-t}$

m_j/m_i^m × 另有一个极大理想

R/m_i^m Artin环 待证

(5)

先证 R/m^k 为诺特环.

$0 \to \dfrac{m^{j+1}}{m^k} \to \dfrac{m^j}{m^k} \to \dfrac{m^j}{m^{j+1}} \to 0$

$j = k-1$ 可证 $\dfrac{m^{k-1}}{m^k}$ 诺特模

$j = k-2$ m^{k-2}/m^k 诺特模 ??

⋮

$j = 0$ R/m^k 诺特模 ⟹ 诺特环

m^j/m^{j+1} 是诺特的:

视为 R/m 模. 有限维线性空间

而 m^j/m^{j+1} 是 R/m^k 模 ⟹ m^j/m^{j+1} Artin模

例 1: $\mathbb{Z}$ 诺特. 但不是 Artin环

(2) Artin 模 ⇏ 诺特模

$M = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ 非诺特: $(\frac{1}{p}) \subseteq (\frac{1}{p^2}) \subseteq \cdots$

是 Artin. $x \in M$ $x = \dfrac{a}{p^k}$. $(a, p^k) = 1$

⟹ $au + bp^k = 1$ ⟹ $ux = \frac{1}{p^k} \in M$

⟹ $M/\{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$

$\frac{1}{p^k} \mapsto k$ 于是若 $f(M_1)$ 有上界 k

⟹ $M_1 \subseteq (\frac{1}{p^k})$ 降链稳定

命题. $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 正合.

M Artin模 $\Leftrightarrow$ M', M'' Artin 模

"$\Rightarrow$" M' 的子模降链是 M 的子模降链

$M''\cong M/M'$

$\Rightarrow$ M'' 的降链 $\bar N_1 \supseteq \bar N_2 \supseteq \cdots$ 稳定

对应 $N_1\supseteq N_2\supseteq\cdots$ 稳定

"$\Leftarrow$" $0\to M'\to M\to M''\to 0$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_k\cap M' \arrow[r] & N_k \arrow[r] & N_k/N_k\cap M' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_{k+1}\cap M' \arrow[r] \arrow[u, equal] & N_{k+1} \arrow[r] \arrow[u] & N_{k+1}/N_{k+1}\cap M' \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

稳定　　稳定

$\Rightarrow N_k = N_{k+1} = \cdots$ 稳定 □

命题 M 的长度有限 $\Leftrightarrow$ M 既是诺特也是Artin模

"$\Rightarrow$" 显然.

"$\Leftarrow$" M 诺特且 Artin

设 X 是 M 中长度有限的子模集合.

$\because 0\in X \Rightarrow X$ 非空

$\Rightarrow \exists\, N\in X$ 极大元　下证 $M=N$. 否则

$Y=\{N' \mid N\subsetneq N'\subseteq M\}$

$\because M\in Y \Rightarrow Y$ 非空 $\Rightarrow$ Y 存在极小元 N_0

$\Rightarrow$ N_0/N 是单模 $\Rightarrow$ N_0 长度有限

$N_0\in X$ 矛盾 □

局部化结论.

① $S^{-1}R\otimes M \cong S^{-1}M$　($S^{-1}R$ 模同构).

②
$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_S"'] & N \\
S^{-1}M \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

f 为 R 模同态.

N 有 $S^{-1}R$ 模结构

则 $\exists!\, g: S^{-1}M\to N$.　$g\circ\varphi_S = f$

$g(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s} f(m)$

③ $S^{-1}\square$ 为正合函子

推论 $S^{-1}R$ 为平坦 R 模

④ $I\subseteq R$.　$J\subseteq S^{-1}R$

(1) $S^{-1}I$ 为 $S^{-1}R$ 理想且

i $S^{-1}(I_1+I_2) = S^{-1}(I_1)+S^{-1}(I_2)$

$S^{-1}(I_1\cap I_2) = S^{-1}(I_1)\cap S^{-1}(I_2)$

$S^{-1}(I_1\cdot I_2) = S^{-1}(I_1)\cdot S^{-1}(I_2)$

ii $S^{-1}(R/I)\cong S^{-1}R/S^{-1}I$

若 $I_1\subseteq I_2$ 则

$S^{-1}(I_2/I_1)\cong S^{-1}I_2/S^{-1}I_1$

(2) $J^{ce}=J$

注 $I\subseteq R$. 且 $I\cap S\neq\emptyset$. 则 $S^{-1}R = S^{-1}I$

⑤ Thm. $\{R$ 中与 S 不交的素$\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{S^{-1}R$ 中素$\}$

$p \longmapsto p^e$

$q^c \longmapsfrom q$

⑥ R 诺特环 $\Rightarrow$ $S^{-1}R$ 诺特环

⑦ $S^{-1}(M\oplus N)\cong S^{-1}M\oplus S^{-1}N$

$S^{-1}(M\otimes_R N)\cong S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N$

✓命题. R 整环. 则 $R=\cap R_p = \cap R_m$

$\subseteq$　$\subseteq$　显然.　$\forall\, a\in \cap R_m$

$I_a=\{d\in R \mid da\in R\}\subseteq R$

$a\in R \Leftrightarrow I_a=(1)$

若 $a\notin R$.　$I_a\subseteq m$. 极大　$\Rightarrow a\in R_m$

$\Rightarrow a=\frac{r}{d}$ · $r\in R$. $d\in R-m$.　$\Rightarrow da=r\in R$

$\Rightarrow d\in I_a\subseteq m$　矛盾

2.5 仿射代数几何初步

定义：设 $S\subseteq k[x_1,\cdots x_n]$ 集合

$$Z(S)=\{a\in\mathbb{A}^n \mid f(a)=0\ \forall f\in S 成立\}$$

$$Z(S)=Z((S))=Z(\{f_1,\cdots f_m\})\triangleq Z(f_1,f_2,\cdots f_m)$$

若 $V\subseteq\mathbb{A}^n$. $\exists S$. $Z(S)=V$

称 V 为仿射代数集

例 (1) $Z(0)=\mathbb{A}^n$. $Z(1)=\phi$

(2) $Z(x_1-a_1, x_2-a_2,\cdots x_n-a_n)=\{(a_1,\cdots a_n)\}$ 独点集

(3) 对 $0\neq f\in k[\mathbb{A}^n]$. $Z(f)$ 为 $\mathbb{A}^n$ 上超曲面.

(4). $n=1$. $\mathbb{A}^1$ 中的仿射代数集

为 ϕ. $\mathbb{A}^1$. 及有限点集

命题. 仿射代数集的性质

(1) $S\subseteq T$, $\Rightarrow Z(S)\supseteq Z(T)$

(2) $Z(S)=Z(\langle S\rangle)=Z(f_1,\cdots f_m)=Z(f_1)\cap\cdots\cap Z(f_m)$

(3) V交 有限并 还是仿射代数集

$\cap Z(S_i)=Z(\cup S_i)$

$Z(I)\cup Z(J)=Z(I\cdot J)$ $\langle S\rangle$ 为 S 生成的理想

(4) $\langle S\rangle$. $Z(\sqrt{\langle S\rangle})=Z(\langle S\rangle)$.

反过来 $A\subseteq\mathbb{A}^n$. $I(A)=\{f\mid f(a)=0\ \forall a\in A\}$

$I(A)\subseteq k[\mathbb{A}^n]$ 为理想

性质. (1). $I(A)=\sqrt{I(A)}$

(2) $A\subseteq B\Rightarrow I(A)\supseteq I(B)$

(3) $I(A\cup B)=I(A)\cap I(B)$

(4) $I(\phi)=k[\mathbb{A}^n]$. 若 k 无限域 $I(\mathbb{A}^n)=0$

进一步 若 I 为理想. $A\subseteq\mathbb{A}^n$.

(1) $I\subseteq I(Z(I))$. $A\subseteq Z(I(A))$

(2) 若 $V=Z(I)$ 为仿射代数集

则 $V=Z(I(V))$

定义. $\mathbb{A}^n$ 中仿射代数集 V 的坐标环

$$k[V]:=k[\mathbb{A}^n]/I(V)$$

注. k 无限域 $V=\mathbb{A}^n$ 时 $I(V)=0$.

则上述定义与前述定义一致.

注意到 (1) $f\in k[\mathbb{A}^n]$ $f:\mathbb{A}^n\to k$

$f|_V=g|_V \Leftrightarrow f-g\in I(V)$

$\therefore \bar{f}\in k[V]$ 令 f 为其代表

$\bar{f}: V\to k$
$a\mapsto f(a)$ 是定义良好的

($Hom(V,k)\cong k[x_1,\cdots x_n]/I(V)$).

(2) $k[V]$ 是诺特环.

定义态射: $V\subseteq\mathbb{A}^n$. $W\subseteq\mathbb{A}^m$ 为 Alg set

若存在 $\varphi_1\cdots\varphi_m\in k[\mathbb{A}^n]$ 使得

$\varphi: V\to W$

$(a_1,\cdots a_n)\mapsto(\varphi_1(a_1\cdots a_n),\cdots \varphi_m(a_1\cdots a_n))$

同构是指 $\psi\varphi=1_V$. $\varphi\psi=1_W$

(注. φ 不必唯一确定)

设 $\varphi: V\to W$ 为态射

$\varphi^*: k[W]\to k[V]$

$f+I(W)\mapsto f(\varphi_1,\cdots\varphi_m)+I(V)$

定义好: $f-g|_W=0$

$\because (\varphi_1,\cdots\varphi_m)\in W$

$\Rightarrow (f-g)|_{(\varphi_1\cdots\varphi_m)}=0$

$\Rightarrow (f-g)(\varphi_1\cdots\varphi_m)|_V=0$

$\to (f-g)(\varphi_1\cdots\varphi_m)\in I(V)$

反过来. 设 $\Phi: k[W] \to k[V]$ 为 k-代数同态

$$\Phi(x_i + I(W)) = F_i(x_1, \dots, x_n) + I(V) \qquad 1 \le i \le m.$$

若 $g(x_1, \dots, x_m) \in I(W)$ $\quad \bar{0} \longmapsto \bar{0}$

则 $\Phi(g(x_1, \dots, x_m) + I(W)) = g(F_1, \dots, F_m) \in I(V)$

$\therefore$ 若 $(a_1, \dots, a_n) \in V \Rightarrow g(F_1(a) \dots F_m(a)) = 0$

$\Rightarrow (F_1(a), \dots, F_m(a)) \in Z(I(W)) = W$

这样 $\varphi: V \to W$, $a \mapsto (F_1(a), \dots, F_m(a))$ 是 $V \to W$ 映射

它与 F_i 选取无关 且 $\hat{\varphi} = \Phi$

Thm. $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$, 仿射代数集

$\{V \to W\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{k[W] \to k[V]$ 的 k-代数同态$\}$

$\varphi \longrightarrow \hat{\varphi}$

$\square \longleftarrow \Phi$

满足 (1) $\forall \Phi: k[W] \to k[V]$

$\exists!\ \varphi: V \to W$. $\hat{\varphi} = \Phi$

(2) $\widehat{\psi \circ \varphi} = \hat{\varphi} \circ \hat{\psi}$

(3) φ 是同构 $\Leftrightarrow$ $\hat{\varphi}$ 是同构.

希尔伯特零点定理.

k为代数闭域

$I(Z(I)) = \sqrt{I}$ 对 $\forall I \subseteq k[\mathbb{A}^n]$ 成立

故 给出 一一对应

$\{\mathbb{A}^n$ 中仿射代数集$\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{k[\mathbb{A}^n]$ 中根式理想$\}$

$Z(\sqrt{I}) = Z(I) \longleftarrow \sqrt{I}$

$V \longmapsto I(V)$

特别地, 若 $I \subsetneq k[\mathbb{A}^n]$ 则 $Z(I)$ 非空

Thm. 诺特正规化引理

k为域. $A = k[r_1, \dots, r_m]$ 为有限生成 k代数

则 $\exists\, q$. $0 \le q \le m$ 及元素 $y_1, \dots, y_q \in A$

它们在 k上代数独立. 使得 A在 $k[y_1, \dots, y_q]$

证明: 归纳. $m=1$ 时

r_1 整 $\Rightarrow q = 0$

r_1 超越 $\Rightarrow q = 1$

一般地m, 若 $r_1, \dots, r_m$ 代数独立. 则 $q = m$, $A = k[r_1, \dots$

否则 $\exists\, f(x_1, \dots, x_m) \in k[x_1, \dots, x_m]$

$\deg f = d > 0$ 使得 $f(r_1, \dots, r_m) = 0$

不妨设 f 关于 x_m 是非常值多项式

对 $1 \le i \le m-1$ 令 $\alpha_i = (1+d)^i$

$X_i = x_i - x_m^{\alpha_i}$

则 $g(X_1, \dots, X_{m-1}, x_m) = f(X_1 + x_m^{\alpha_1}, \dots, x_m)$

$\in k[X_1, \dots, X_{m-1}, x_m]$

可写成 $c x_m^N + \sum_{i=0}^{N-1} h_i(X_1, \dots, X_{m-1}) x_m^i$

令 $s_i = r_i - r_m^{\alpha_i}$ 则

$\frac{1}{c} g(s_1, \dots, s_{m-1}, r_m) = \frac{1}{c} f(r_1, \dots, r_m) = 0$

$\Rightarrow r_m$ 在环 $B = k[s_1, \dots, s_{m-1}]$ 上整

又 $r_1, \dots, r_{m-1}$ 在 $B[r_m]$ 上整

$(r_i = s_i + r_m^{\alpha_i} \in B[r_m])$

$\therefore$ A在 B上整.

而 B是 $m-1$ 个元素生成 的 k代数

$\Rightarrow$ 由归纳假设和整性的传递性

Thm. Hilbert 定理的弱形式

k 为代数闭域，m 为 $k[x_1\cdots x_n]$ 的极大～

$\Leftrightarrow m=(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)$.

特别地 若 $I\subsetneq k[\mathbb{A}^n]$ 则 $Z(I)$ 非空

证 "$\Leftarrow$" $f: \mathbb{A}^n \to k$

$(a_1\cdots a_n)\mapsto f(a_1\cdots a_n)$

$m=\ker f$ 为 k 的极大理想

"$\Rightarrow$" 令 $E=k[\mathbb{A}^n]/m = k[\hat{x}_1,\cdots \hat{x}_n]$

E 是 有限生成 k-代数.

由诺特正则化引理. E 在 $k[y_1,\cdots y_q]$ 上整

$\because E$ 是域 $\Rightarrow k[y_1\cdots y_q]$ 也域 $\Rightarrow q=0$

$\therefore E$ 在 k 代数闭域上整 $\Rightarrow E=k$

$\because \hat{x}_i=a_i\in k \Rightarrow x_i-a_i\in m$.

$\therefore m=(x_1-a_1,\cdots x_n-a_n)$

对 $I\subsetneq k[\mathbb{A}^n]$

$I\subseteq m$ 极大. $m=(x_1-a_1,\cdots x_n-a_n)$

$\Rightarrow (a_1\cdots a_n)\in Z(I)\neq\phi$ □

希尔伯特零点定理的证明

设 $I=(f_1,\cdots f_m)$. $g\in I(Z(I))$

令 I' 是多项式环 $k[x_1,\cdots x_n,x_{n+1}]$ 中

由 $\{f_1,\cdots f_m, x_{n+1}g-1\}$ 生成的理想

则 $Z(I')=\phi$

故由零点定理弱形式 $1\in I'$

即 $\exists\, a_i=a_i(x_1,\cdots x_{n+1})\in k[x_1\cdots x_{n+1}]$

$1=\sum_{i=1}^m a_if_i+a_{m+1}(x_{n+1}g-1)$

令 $y=\frac{1}{x_{n+1}}$ 上式即

$y^N=c_1f_1+\cdots+c_mf_m+c_{m+1}(g-y)$

$(c_i\in k[x_1\cdots x_n,y])$

将 $g=y$ 代入上式

$g^N=y^N\in I \Rightarrow g\in\sqrt{I}$ □

定义 拓扑：$\mathbb{A}^n$ 中由仿射代数集作为闭集决定的拓扑 称为 $\mathbb{A}^n$ 上 Zariski 拓扑

$n=1$. $k=\mathbb{A}^1$

除去全空间 k 外，其余闭集均为有限集

(若 k 无限域，则 是 T_1 但不是 T_2 的)

不可约：V 为仿射代数集.

V 不可约 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $V=V_1\cup V_2$ 则 $V=V_1$ 或 $V=V_2$

↓

称为 仿射簇

命题. (1) V 不可约 $\Leftrightarrow I(V)$ 为素理想

即. V 为仿射代数簇 $\Leftrightarrow k[V]$ 为整环

(2) V 可唯一表示成 $V=V_1\cup\cdots\cup V_n$

V_i 不可约. 且 $V_i\not\subseteq V_j$ $\forall i\neq j$

(1) "$\Leftarrow$"：$I=I(V)$. 若 $V=V_1\cup V_2$

$V_i\subsetneq V$. $\Rightarrow \exists f_i\in I(V_i)-I(V)$

而 $f_1f_2\in I(V)$ 矛盾

"$\Rightarrow$" $f_1f_2\in I(V)$. $f_1,f_2\notin I(V)$

$V_1=Z(f_1)\cap V$. $V_2=Z(f_2)\cap V$

$V_1\cup V_2=V$ 与不可约矛盾.

(2) $I=\cap q_i$

$\sqrt{I}=\cap p_i$ 有限. 唯一

↓

$Z(\sqrt{I})=Z(I)=\cup Z(p_i)$ 有限. 唯一. □

交换环素谱上的拓扑

设k为域

(1) $\mathrm{Spec}\,k = \mathrm{Max}\,k = (0)$

(2) $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} = \{(0)\} \cup \mathrm{Max}\,\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{(p) \mid p$素$\}$

(3) $\mathrm{Spec}\,k[x] = \{(0)\} \cup \mathrm{Max}(\ ) = \{0\} \cup \{(f) \mid f$不可约$\}$

(4) $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[x]$

1) (0)

2) (p).　p为素,

3) (f)　$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 不可约

4) (p, g)　p素.　$g \in \mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 上不可约

定义 (把 Spec 中的素 称为"点")

$f \in R$, $p \in \mathrm{Spec}$. $f(p) = 0 \Leftrightarrow f \in p$

$A \subseteq R$. 子集

$Z(A) = \{p \mid f(p) = 0 \ \forall f \in A\}$

$= \{p \mid A \subseteq p\}$　$(\sqrt{A} \subseteq p)$

Y为 $\mathrm{Spec}\,R$ 的子集

$I(Y) = \{f \in R \mid f(p) = 0 \ \forall p \in Y\}$

$= \bigcap\limits_{p \in Y} p$

命题. Z. I 满足性质

(1) $I \subseteq R$ 理想 $Z(I) = Z(\sqrt{I})$

$I(Z(I)) = \sqrt{I}$

(2) $Z(I \cap J) = Z(I \cdot J) = Z(I) \cup Z(J)$

(3) $Z(\bigcup\limits_j I_j) = \bigcap\limits_j Z(I_j)$

由此 $T = \{Z(I) \mid I$为R中理想$\}$

是 $\mathrm{Spec}\,R$ 中 Zariski 拓扑的闭集