直积与直和.

定义: $S.T$ 为 R-模 直积为 $S\times T = \{(s,t) \mid s\in S, t\in T\}$

另一种定义:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ S & & T \\ & N \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

$M.S.T$ 为 R-模

$\forall N$. R-模 $\exists!\ \varphi: N\to M$ 使图表交换

$(M;p,q)$ 称为 S与T 直积

$(M;p,q)$ 与 (M',p',q') 若都是直积

则同构:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ S & & T \\ & M' \arrow[ul, "p'"] \arrow[ur, "q'"'] \arrow[uu, "f"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M' \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] & \\ S & & T \\ & M \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "q"'] \arrow[uu, "g"] & \end{tikzcd}$$

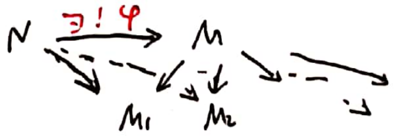
$p' = pf$. $\quad p = p'g$

$\Rightarrow \begin{cases} p' = p'gf \\ q' = q'gf \end{cases}$ $\Rightarrow$ 由

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] & \\ S & & T \\ & M' \arrow[ul, "p'"] \arrow[ur, "q'"'] \arrow[uu, "gf"] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow gf = 1_{M'}$ 同理 $fg = 1_M$. 同构

对 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ R-模集合.



直和. $(M;i,j)$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dd, "\exists!"] & \\ S \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[ul, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

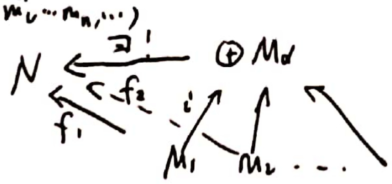
$S.T \subseteq M$ 子模

$M = S+T$. $\quad S\cap T = \{0\}$

M 称为直和. $\quad M = S\oplus T$

$\forall m\in M$. $m = s+t$ 分解存在且唯一.

$\oplus M_\alpha = \{(m_\alpha)\in\prod M_\alpha \mid$ 只有有限 $m_i \neq 0\}$
$(m_1 \cdots m_n, \cdots)$



$\sum f_i(m_i)$
有限求和

命题 1.29. 下述等价.

(1) $M \cong S\times T$

(2) $\exists$ 单. $i: S\to M$. $j: T\to M$

$M = \operatorname{im} i \oplus \operatorname{im} j$

(3) $\exists\ i: S\to M$. $j: T\to M$

s.t. $\forall m\in M$. $\exists!$ s.t. $m = i(s)+j(t)$

(4) $\exists\ i: S\to M$, $j: T\to M$

$p: M\to S$. $q: M\to T$

s.t. $pi = 1_S$. $qj = 1_T$.

$pj = 0$. $qi = 0$

$ip + jq = 1_M$

(4) $\Rightarrow$ (1).

$\varphi: S\times T\to M$

$(s,t) \longmapsto i(s)+j(t)$

$p(i()+j()) = 0 \Rightarrow s=0$

$q(i()+j()) = 0 \Rightarrow t=0$ 单

又 $ip(m)+jq(m) = m$

$\Rightarrow \varphi(p(m), q(m)) = m$ 满

命题: (1) $\operatorname{Hom}(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha, N) \cong \prod_\alpha \operatorname{Hom}(M_\alpha, N)$

(2) $\operatorname{Hom}(N, \prod_\alpha M_\alpha) \cong \prod_\alpha \operatorname{Hom}(N, M_\alpha)$

(1)

$$\begin{tikzcd} \oplus M_\alpha \arrow[r, "f"] & N \\ M_1 \cdots \arrow[u, "i_1"] & M_n \cdots \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

由 $f\in \operatorname{Hom}(\oplus M_\alpha, N)$

$\Rightarrow f i_1 \in \operatorname{Hom}(M_\alpha, N)$

$\Rightarrow \exists!$

$\operatorname{Hom}(\oplus M_\alpha, N) \longrightarrow \prod \operatorname{Hom}(M_\alpha, N)$

单 $\quad \prod \operatorname{Hom}(M_\alpha\to N)$
$f=0 \Rightarrow$ 每个分量 $=0$.

直和项. $S \leq M$. 子模 若 $\exists T \leq M$ 子模

$M = S \oplus T$

命题 S 是 M 直和项 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 模同态 $p: M \to S$

$p|_S = 1_S$

"$\Leftarrow$" $T = \ker p$.

$S + T = M$

$p(m)$ $m - p(m)$. m

$\downarrow$

$p(m - p(m)) = 0$.

若 $m \in S \cap T$. $p(m) = m = 0$.

推论 若 $\exists A$. $S \leq A \leq M$

则 $A = S \oplus (A \cap T)$

$p: M \to S$ 已证

$p|_A: A \to S$ 可证.

命题 $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ 是 M 的子模族

$M = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i \Leftrightarrow \forall m.$ $m = s_1 + \cdots + s_n$ 唯一分解

$\cong \prod_{i=1}^{n} S_i$

$$\begin{tikzcd} \prod S_i \arrow[d, "p_1"'] \arrow[rr] & & S_n \\ S_1 & \cdots & \end{tikzcd}$$

$m = \sum_{i=1}^{n} p_i(m)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & \prod S_i \\ S_1 & S_2 \arrow[u, "\exists !"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

推论 $S_i \cap (S_1 + \cdots + S_{i-1} + S_{i+1} + \cdots + S_n) = 0$

正合列.

复形: $M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1}$

$\operatorname{im} f_{n+1} \subseteq \ker f_n$

正合列 $\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$

$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$

f 单 g 满

B 看成 A 与 C 的扩展

注: $A \subset B$. $p: B \to A$ s.t. $p|_A = id_A$

$B = A \oplus \ker p$

定义 分裂

$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 正合

$\exists j: C \to B$ $gj = Id_C$.

命题: 正合列分裂 $\Rightarrow B \cong A \oplus C$

$b \longmapsto (b - jg(b), g(b))$ $(gj = Id_C)$

单. $g(b) = 0 \Rightarrow b \in \operatorname{Im} f$.

$\Rightarrow b = 0$

满. $\forall (a, c) \in A \oplus C$

$b = f(a) + j(c)$

$\square$

$f: M \to N$. $\operatorname{coker} f = N / \operatorname{Im} f$

诱导正合列

$0 \to \ker f \to M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{coker} f \to 0$.

命题. $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ 正合

$\Leftrightarrow$ $0 \to \operatorname{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{p^*} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Hom}(M', N)$. 正合.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d] \arrow[dl, "i^*"'] & M'' \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "p^*"'] \\ N & N & N \end{tikzcd}$$

"$\Leftarrow$" 证 p 满: 取 $N = M'' / \operatorname{Im} p$

$p_*(f) = fp = 0$ 由 p^* 单 $\Rightarrow f = 0$

用反证. (若 $\operatorname{Im} i \subsetneq \ker p$)

记 $\operatorname{Im} i = \ker p$.

"$\Rightarrow$" $\ker i^* = \operatorname{Im} p^*$;

即证. 若 $gi = 0$

则 $\exists f$ $fp = 0$

对 $x'' \in M''$. $\exists x \in M$. $p(x) = x''$

设 $f(x'') = g(x)$. 证 $\begin{cases} \text{well define} \\ fp = 0 \end{cases}$

p^* 单

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ d_A\downarrow & \supset & \downarrow d_B \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \ker f & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \to & \operatorname{coker} f & \to 0 \\ & d_A\downarrow & & \downarrow d_A & & \downarrow d_B & & \downarrow d_B & \\ 0 \to & \ker f' & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \to & \operatorname{coker} f' & \to 0 \end{array}$$

$\operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} f'$

$b + \operatorname{Im} f \mapsto d_B(b) + \operatorname{Im} f'$ 要证 well-defined

蛇形引理.

由
$$\begin{array}{ccccccc} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to 0 \\ & \downarrow d_A & & \downarrow d_B & & \downarrow d_C & \\ 0 \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \end{array}$$

诱导长正合列

$\ker d_A \xrightarrow{f} \ker d_B \xrightarrow{g} \ker d_C \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d_A \xrightarrow{f'} \operatorname{coker} d_B \xrightarrow{g'} \operatorname{coker} d_C$

对 $c \in \ker d_C$

$\exists\ b.\ g(b) = c.\quad \because d_C(c) = 0$

$\Rightarrow d_C g(b) = g'(d_B(b)) = 0$

$\Rightarrow d_B(b) = f'(a')$

$\Rightarrow \delta(c) = a' + \operatorname{Im} d_A$. 要证 well-defined

后面要证 $\begin{cases} \ker g = \operatorname{Im} f \\ \ker \delta = \operatorname{Im} g \\ \ker f' = \operatorname{Im} \delta \\ \ker g' = \operatorname{Im} f' \end{cases}$

证②. 对 c. $\exists\ b.\ g(b) = c$

$\because d_B(b) = f'(a')$

且 $\delta(c) = \bar{0} \Rightarrow a' \in \operatorname{Im} d_A$

$\Rightarrow a' = d_A(a)$

取 $b_0 = b - f(a) \in \ker d_B$.

可证 $g(b_0) = c$

证④: $b' \in B'$. $g'(b') \in \operatorname{Im} d_C$

$\Rightarrow g'(b') = d_C(c)$

$\Rightarrow \exists\ b.\ g(b) = c$

$\Rightarrow g'(b') = d_C \circ g(b)$

$\Rightarrow g'(b' - d_B(b)) = 0$

$\Rightarrow \exists\ a'.\ f'(a') = b' - d_B(b) \Rightarrow \overline{f'(a')} = \overline{b'}$

范畴

对象. 态射.

公理. (1) $\operatorname{Hom}(A,B)$ 与 $\operatorname{Hom}(A',B')$

仅在 $\begin{cases} A = A' \\ B = B' \end{cases}$ 时相交

(2) id_A $\exists!$. $A \to A$

(3) 结合律. $f(gh) = (fg)h$

同构. $A \cong B$:

$A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$. $\begin{cases} fg = Id_B \\ gf = Id_A \end{cases}$

例子. Sets

$obj(G)$

1. A 为有限集

态射 $A \xrightarrow{f} B$ ↗ 所有可能映射 m^n
→ 单射 $\frac{m!}{(m-n)!}$
↘ 双射. $=$ S_n
$\#A \neq \#B \cdot \phi$

2. 偏序集

$x, y \in ob$

若 $x \le y$ $\quad x \to y$

则 $x \to x$ $(\because x \le x)$

若 $x \to y$. $y \to z$ 则 $x \to z$

3. R-模. R-模同态

定义. $A \in obj(\mathcal{C})$. $\mathcal{C}_A$.

$obj(\mathcal{C}_A) = \operatorname{Hom}(B, A)$

$Mor(\mathcal{C}_A) = \{\operatorname{Hom}(B,A) \to \operatorname{Hom}(C,A)\}$

反范畴 从 $\mathcal{C}$ 得到 $\mathcal{C}^{op}$

$obj(\mathcal{C}^{op}) = obj(\mathcal{C})$

$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$.

定义. 始对象：P 称为 initial object

对 $\forall A \in ob(\mathcal{C})$, $\exists!$ $Hom(P, A)$.

（特别地 $Hom(P,P) = Id_P$ ）

终对象 --- $\exists!$ $Hom(A, P)$

零对象：既终又始（对象）

始/终 若$\exists$，则同构下唯一.

$P \xrightarrow{f} P' \xrightarrow{g} P$

$\Rightarrow P \to P$ 有 $gf = Id_P$

$fg = Id_{P'}$ □

对 $obj(\mathcal{C}) = \{A\}$ $Hom = Id$.

是零对象

对 $obj(\mathcal{C}) = \{A, B\}$ $A \to A$, $B \to B$

无始对象. 终对象

零态射. 设 z 是 $obj(\mathcal{C})$ 的零对象

$\forall A, B \in obj(\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

$A \to B$ 称为零态射

例子. Groups. $G \xrightarrow{f} G'$

$1 \to G'$

$G \to 1$.

Rings $R \to R'$

$(0_R, 1_R) \to (0_{R'}, 1_{R'})$

不是终对象

0 终对象

$\mathbb{Z}$ 始对象

R-模 0 为零对象

$M \to N$ 零态射 即为 $0: m \to 0$

对 $\mathcal{C}_A$. 为终对象

$Id: A \to A$

$A, B \in obj(\mathcal{C})$,

$(A \times B, p, q)$ (product)

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ A & & B \\ & C \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, "\exists!"] & \end{tikzcd}$$

上乘积. $(X \sqcup Y, i, j)$ (coproduct)

$$\begin{tikzcd} & A \sqcup B \arrow[dd, "\exists!"] & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & B \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$A \longrightarrow A \sqcup B$

$a \longmapsto a \times \{b_0\}$

$B \to A \sqcup B$

$b \mapsto (a_0, b)$

不像 R-模有加法性质

定义 • 拉回 (pull back)

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr, bend right] & A \times_C B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & A \arrow[d, "g"] \\ & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

$D \to B \to C$

$D \to A \to C$ 交换.

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "\exists!"] \arrow[dr, bend right] \arrow[rr, bend left] & D \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ & B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

用 D 代替 $A \times_C B$.

按 $\underbrace{A \times_C B \to D \to A \times_C B}_{\text{已知是} Id}$ $\therefore Id = ig$

$\Rightarrow$ 同构下唯一.

• 推出 (push-out)

$$\begin{tikzcd} D & A \sqcup_C B \arrow[l, "\exists!"'] & A \arrow[l] \arrow[ll, bend right] & g(c) \\ & B \arrow[u] \arrow[ul, bend left] & C \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"'] \\ & f(c) & c \end{tikzcd}$$

拉回 $\begin{cases} R\text{-模}: & A \times_C B = \{(a,b) \in A \times B \mid g(a) = f(b)\} \\ \text{sets}. & \text{同上}. \end{cases}$

R-模: $\because (0, f(c)) = (g(c), 0)$

$A \sqcup_C B = A \oplus B / S$.

扫描全能王 创建

函子. functor $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}'$

协变函子: $F: A \longrightarrow F(A)$. 保复合.

对 $A \xrightarrow{f} B$

有 $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$

特别地 $F(Id_A) = id_{F_A}$

$F(gf) = F(g)\cdot F(f)$

反变函子. $F: A \xrightarrow{f} B$

$F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$

$F(gf) = F(f)F(g)$

例子 1. forgetful functor (省略更精细的性质)

C^∞流形 $\longrightarrow$ 拓扑空间

C^∞映射 $\longrightarrow$ 连续映射

2. $\mathcal{C}_1$: A. $A \xrightarrow{Id} A$

$\mathcal{C}_2$: X, Y $X \xrightarrow{Id_X} X$ $Y \xrightarrow{Id_Y} Y$

$\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$: F: $A \mapsto X$ 或 $F: A \mapsto Y$

$Id_A \mapsto Id_X$ $Id_A \mapsto Id_Y$.

$\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ F. $X \mapsto A$ $Id_X \mapsto Id_A$

$Y \to A$ $Id_Y \mapsto Id_A$

恒等函子.

常函子. $B \mapsto A$.

$f \mapsto Id_A$

Rmod $\to$ 交换群 (忘记函子)

固定R模: N

R-模 $\longrightarrow$ R-模

$M \longmapsto M \times N$

或 $M \longmapsto Hom(N,M) \times Hom(M,N)$ 反变函子

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & M' \\ N \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "诱导"'] & M' \arrow[d] \\ & N \end{tikzcd}$$

注: $\mathcal{C}^{op}$: A. B.

上乘积与 $\mathcal{C}$ 里 B. A 的乘积一致

乘积 上乘积一致

定义. 加性范畴 $\mathcal{C}$

(1) 对 $\forall A. B \in obj(\mathcal{C})$.

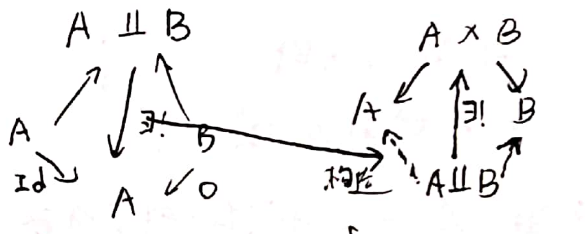
$Hom(A,B)$ 为 Abel 群

且 $Hom(B,C) \times Hom(A,B) \to Hom(A,C)$ 为 $\mathbb{Z}$-双线性映射

(2) $\mathcal{C}$ 中有零对象

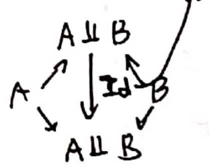
(3) $\forall A, B \in obj(\mathcal{C})$ $A \sqcup B$. $A \times B$ 存在

命题: 加性范畴中 $A \sqcup B \cong A \times B$



$$\underbrace{A \sqcup B \xrightarrow{p} A \times B \xrightarrow{\varepsilon} A \sqcup B}_{诱导} = Id \Rightarrow \varepsilon p = Id$$

但



□

定义 单射. $\overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} \xrightarrow{f}$ (若 $\forall g_1. g_2$ $fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$) $\Rightarrow f$ 单

满射 $\longrightarrow \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}}$ (若 $h_1 f = h_2 f \Rightarrow h_1 = h_2$)

f 满

注: 同构不一定是双射. 但双射一定同构

环范畴. $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 既单且满

加性范畴 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$

(1) 若它的乘积 $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ 存在.

则 $\pi_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\alpha$ 满

(2) 上乘积 $\coprod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ 存在

$i_\alpha : X_\alpha \to \coprod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ 为单.

$$\begin{tikzcd} & \prod X_\alpha \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr] & \\ X_\alpha & & X_\beta \\ & X_\alpha \arrow[uu, "i"] \arrow[ul, "Id"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$\pi\circ i = Id$
$\Rightarrow \pi$ 为满射

定义: 加性范畴

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & D \arrow[u, "u"] \arrow[ul, "\exists!"] & \end{tikzcd}$$

$f\circ i = 0$
若 $f\circ u = 0$
则 $\exists!$

i 单

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] & A \\ & D' \arrow[u] \arrow[ul, "u', u''"] \end{tikzcd}$$

若 $i\circ u' = i\circ u''$
$f\circ i\circ u' = f\circ i\circ u'' = 0$.
故由唯一性 $u' = u''$
$\Rightarrow i$ 单.

若 $A \xrightarrow{f} B$ 单射

$$\begin{tikzcd} 零对象\ 0 \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & D \arrow[ul, "0"] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$f\circ u = 0 = f\circ 0$
$\Rightarrow u = 0$

余核.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & D \arrow[dl, "\exists!"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

$p\circ f = 0$
$g\circ f = 0$
则 $\exists!$

p 是满射　D 称为余核

定义: $\mathrm{coIm}\, f = \mathrm{coker}(\ker f \xrightarrow{i} A)$

$\mathrm{im}\, f = \ker(B \xrightarrow{p} \mathrm{coker} f)$

$\ker f \xrightarrow{i} A \longrightarrow \mathrm{coim} f$

命题. 加性范畴. ker. coker $\exists$

则 $\bar f : \mathrm{coim} f \to \mathrm{im} f$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"] & B \arrow[r, "p"] & \mathrm{coker} f \arrow[r] & 0 \\ & & \mathrm{coim} f \arrow[ur, "\alpha\ 一形连"] & \mathrm{im} f \arrow[u, "i'"] & & \end{tikzcd}$$

$f = \alpha\circ p'$

(利用 coimf 的 coker 性质

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r] & Z\,(\mathrm{coker}) \arrow[dl, dashed] \\ & Z' & \end{tikzcd}$$

)

要构造 $\bar f$. 要证 $p\circ\alpha = 0$

$\because\ p\circ\alpha\circ p' = p\circ f = 0$
$= 0\circ p'$

$\Rightarrow p\circ\alpha = 0 \Rightarrow$ 诱导 $\bar f$ □

阿贝尔范畴

① $\forall$ 态射 f. $(\ker f, i)$ $(\mathrm{coker} f, p)$ 均存在

故 ② $\mathrm{coim} f \to \mathrm{im} f$ 为同构

命题. 在 Abelian category.

双射一定同构

$$\left(\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "id"] \arrow[d] & A\ (\mathrm{coker} 0) \\ & B \arrow[ur, leftarrow] & \end{tikzcd}\right)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"] & B \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\ (\mathrm{coker} 0) = & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, equal] & \\ & \mathrm{coim} f & \mathrm{im} f & \end{tikzcd}$$

由 Abel 范畴定义.
同构.

正合列, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

正合指 $g\circ f = 0$ 且 $\mathrm{im} f \to \ker g$ 同构

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & C & \\ \mathrm{Im} f \arrow[ur, "i"] \arrow[rrr, bend right] & \mathrm{coker} f & & \ker g \arrow[ull] \arrow[ull, dashed] \end{tikzcd}$$

由 $g\circ f = 0$

(1) $0\to A\xrightarrow{f}B$ 正合 $\Leftrightarrow$ f 单

(2) $B\xrightarrow{g}C\to 0$ ～ $\Leftrightarrow$ 满

(3) $0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 正合

$\Leftrightarrow$ f 单，g 满 且 $\bar{g}:\operatorname{coker}f\to C$ 同构

(1)的证明：$0\to A\xrightarrow{f}B$

"$\Leftarrow$" 要证 $\operatorname{im}0=\ker f\overset{单}{=}0$

$\because$ 对 $X\xrightarrow{g}Y\to\operatorname{coker}g$

$\operatorname{Im}g=\ker(Y\to\operatorname{coker}g)$

$\Rightarrow \operatorname{Im}0=\ker(Y\to Y)=\ker(\overset{单}{\mathrm{id}})=0$

"$\Rightarrow$" 利用定义

定义：左正合，右正合，正合 函子 F(协变)

对 $0\to A\to B\to C\to 0$ 正合

若 $0\to F(A)\to F(B)\to F(C)$ 正合，称左～

$F(A)\to F(B)\to F(C)\to 0$ 正合 称右～

$0\to$ $\to 0$ 正合，称正合

例 在 R-模中

$A\to B\to C\to 0$ 正合

$\forall N\Rightarrow 0\to \mathrm{Hom}(C,N)\to\mathrm{Hom}(B,N)\to\mathrm{Hom}(A,N)$

即 $X\to\mathrm{Hom}(X,N)$ 为 左正合反变函子

对 $A\xrightarrow{f}B$ 诱导 正合列

$0\to\ker f\to A\xrightarrow{f}B\to\operatorname{coker}f\to 0$

对给定交换图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

诱导

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & \ker f & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \to & \operatorname{coker}f & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \ker f' & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \to & \operatorname{coker}f' & \to & 0 \end{array}$$

不断使用泛性质

蛇形引理

自由模：

对 R-模 $F=\langle X\rangle$，$X=\{x_i\}_{i\in I}$

X 中的元素线性无关

（若 $\sum r_ix_i=0\Rightarrow r_i=0$）

也即 $F\cong\bigoplus_{i\in I}R_i$．$R_i=\langle x_i\rangle$，$R_i\cong R$．作为 R-模

（例 $R=\mathbb{Z}$ $6\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$ (模) 但环上不同构

$\forall x\in F$．$x=\sum r_ix_i$ 唯一．X 称为基

Thm. M 以 $\{x_i\}_{i\in I}$ 为基，的自由模

N 是任意 R-mod 且 $\{y_i\}_{i\in I}$ 是 N 中元素

则 $\exists!$ 模同态：$f:M\to N$

$x_i\mapsto y_i$

当 $\{y_i\}_{i\in I}$ 为基时 $M\cong N$

满：

单：

定义：自由模 M 的秩 $=\operatorname{rank}(M)$

Thm. ① 自由模的秩不依赖基的选取

② 自由模 F,F' 同构 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}F=\operatorname{rank}F'$

证明：$m\subseteq R$ 极大理想

R/m 域

由 $F\cong\bigoplus_{i\in I}R$，$mF\subseteq F$．

$F/mF\cong\bigoplus R/m\cong\bigoplus K$

任选 R-模 M，可找到 自由模 F

$F\twoheadrightarrow M$

$F=\bigoplus_{m\in M,\,m\neq 0}R\langle x_m\rangle\mapsto m\in M$

$M\cong F/\ker\varphi$ 是自由模商模

对有限生成 M

$F=\bigoplus R\langle m_i\rangle\twoheadrightarrow M$

$\operatorname{rank}(F)<\infty$

F 自由模

上式 … 应找 ∃ g

$$\begin{array}{ccc} & & F = \langle X \rangle \ni x_i \\ & \overset{\exists g}{\swarrow} & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{i} & B \to 0 \end{array}$$

$g(x_i) = a_i$ 即可　$\exists a_i \in i^{-1}(b_i)$　$b_i = f(x_i)$

（不一定唯一）

投射模 Projective Module. P.

存在

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow & \downarrow \\ A & \to & B \to 0 \end{array}$$

显然. 自由模为投射模

Thm. (1). P 投射模

(2). $\mathrm{Hom}(P, -)$ 正合函子

(3). 正合列 $0 \to A \to B \to P \to 0$ 分裂

④ ∃ 模 M. $P \oplus M$ 为自由模

(1) ⇔ (2)

$0 \to B \to A \to C \to 0$

$0 \to \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, C) \to 0$

① ⇒ ③　$0 \to A \to B \to P \to 0$

由投射 ∃　$\uparrow \mathrm{Id}$ P

③ ⇒ ④　$0 \to \ker f \to F \xrightarrow{f} P \to 0$

由分裂. $F = P \oplus \ker f$

④ ⇒ ①　设 $\underline{F} \cong M \oplus P \cong \underline{\underline{M \times P}}$

$$\begin{array}{ccc} F & \overset{p}{\underset{i}{\rightleftarrows}} & P \\ {\scriptstyle h} \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \to 0 \end{array}$$

由 $F \to B$ 得到 $F \to A$

利用 $P \to F$. ⇒ 得到 $P \to A$

图表交换: ∵ $fh = gp$

$p \circ i = \mathrm{Id}$

$fhi = gpi = g$

$\bigoplus_{i \in I} R\langle a_i \rangle \cong F \xrightarrow{\varphi} P = \langle \{a_i\}_{i \in I} \rangle \to 0$

φ'. $\uparrow \mathrm{Id}$

P $(a = \sum r_i a_i)$

$\varphi(a) = \varphi(\sum r_i a_i) = \sum r_i \varphi(a_i)$

P 是 R-模. 则 P 投射模

⇔ $\exists \{a_i\}_{i \in I} \subseteq P$. 及 $\{\varphi_i : P \to R\}_{i \in I}$

使得. (1) $\forall x \in P$. $\varphi_i(x)$ 只有有限处 $\neq 0$

(2) $\forall x \in P$. $x = \sum \varphi_i(x) a_i$

更进一步. P 由 $\{a_i\}$ 生成

给定正合列.

$0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \to 0$

$0 \to K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0$

P. P' 投射模

证明: 则 $K \oplus P' \cong K' \oplus P$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\pi} & M & \to & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \mathrm{Id} & & \\ 0 & \to & K' & \xrightarrow{i'} & P' & \xrightarrow{\pi'} & M & \to & 0 \end{array}$$

$z \leftarrow \pi'(z')$

$z' \to \pi'(z')$

$0 \to K \xrightarrow{f} K' \oplus P \xrightarrow{g} P' \to 0$

$k \mapsto (\alpha(k), i(k))$

$(k', p) \mapsto i'(k') - \beta(p)$

P' 处: $z' \in P'$. 找 $(a, b) \in K' \oplus P$

$i'(a) - \beta(b) = z'$

$\pi'(z' - \beta(z)) = 0$

$\Rightarrow z' - \beta(z) = i'(a)$

K 处 f 单射

$K' \oplus P$ 处　$gf = 0$ 显然

若 $i'(a) = \beta(b)$

$\pi(b) = \pi'\beta(b) = \pi' i'(a) = 0$

$\exists k$. $i(k) = b$. ∵ $i'\alpha(k) = \beta(b) = i'(a)$

$\Rightarrow \alpha(k) = a$

内射模 (injective module)

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i"] & B \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

Thm (1) E是内射模

(2) $Hom(-,E)$ 反变正合函子

(3) $0 \to E \to B \to C \to 0$ 分裂

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "id"] & B \arrow[r] \arrow[dl] & C \arrow[r] & 0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

①⟺② 直接利用定义

①⟹③ ✓

③⟹①

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "p"] & D \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "i"] & \mathrm{coker}\,p \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u, "\beta"] & & \end{tikzcd}$$

$$D = E \oplus B / \{ \langle f(a), -h(a) \rangle \}_{a \in A}$$

f单. 可证 p单. 由第一行分裂

$\Rightarrow i: D \to E$. $ip = 1_E$

可定义 $B \xrightarrow{\beta} D \xrightarrow{i} E$

且 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i\beta} E$ 与 h 一致.

命题. $\{E_i\}_{i\in I}$ 是内射模 则 $\prod_{i\in I} E_i = E$

$$\begin{tikzcd} & E_i & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[dr] & E \arrow[d] \arrow[dl] \\ E_1 & E_2 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Baer 判别法

E内射模 ⟺ ∀理想 I.

$f: I \to E$ 可延拓到 $g: R \to E$. 且 $g|_I = f$

"⟹" 显然

"⟸" 视 A为 B的子模

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

定义 $X = \{(A', g') \mid A \subseteq A' \subseteq B.\ g'|_A = f\}$

$A \to A_0 \to A_1 \to B$ 延拓.

定义偏序: $(A', g') \le (A'', g'')$

$\Leftrightarrow A' \subseteq A''$ 且 $g''|_{A'} = g'$

由 Zorn 引理. 极大元 (A_0, g_0)

若 $A_0 \subsetneq B$. 取 $b \in B$. $b \notin A_0$

$I = (A_0 : b) \subseteq R$

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u] \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

$h: I \to E$

$r \mapsto g_0(rb)$

延拓到 R. (可以提出 r.

$h^*(r) = g_0(rb) = r\,h^*(1)$)

令 $A_1 = A_0 + \langle b \rangle \supsetneq A_0$

$g: a_0 + rb \mapsto g_0(a_0) + r\,h^*(1)$

$g|_{A_0} = g_0$. 故与极大性矛盾

引入可除模!

命题. R 整环. $K = \mathrm{Frac}\,R$ 是 R的内射模

$$\begin{tikzcd} & K & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u] \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

$\forall\ a, b \in I,\ \neq 0$ $\quad f(ab) = a f(b) = b f(a)$

$\Rightarrow \dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b} = c \in K$

$\Rightarrow$ 可定义 $R \to K$, $r \mapsto rc$ 由 Baer ⋯ □

例. $\mathbb{Z}$模 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z}$的内射模

可除模 M. (R-模)

$\forall\ m \in M.\ r \in R, \neq 0\ \exists\ m' \in M.\ rm' = m$

例13. ① R的 Frac R 是可除模

② D_1, D_2 可除模

则 $D_1 \oplus D_2$ 是可除模

$\bigoplus_{i\in I} D_i$ 是可除模.

特别地. Frac R 上的线性空间是可除模

③ 可除模的商模是可除模

引理. R 整. E 内射 $\Rightarrow$ E 可除模

$$\begin{array}{ccccc} & & e\in E & & \\ & & \uparrow & & \\ 0 & \to & I & \to & R \end{array}$$

对 $e\in E$, $r\in R$
$\langle r\rangle = I$

$f: r'r \longrightarrow r'e$

延拓到 R: $h(r) = e = r\,h(1)$ □

命题. R 为 PID 则 M 内射 $\Leftrightarrow$ 可除

"$\Leftarrow$"

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow & & \\ 0 & \to & I & \to & R \\ & & (r_0) & & \end{array}$$

$f(r_0) = e \in E$
$\because\ e = r_0\cdot e'$

$\Rightarrow$ 定义 $R\to E$
$r \mapsto re'$ $(1\mapsto e')$ □

待解决问题

$R=\mathbb{Z}$. f.g $\mathbb{Z}$模 即 f.g. Abel 群.

哪些是投射模? 内射模? 可除模?

$\mathbb{Z}$? $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

$\mathbb{Q}$ 为可除 $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 可除 $\Rightarrow$ 内射

张量积

$\mathcal{C}$: 对象 $f: M\times N\to N$ 双线性

态射 $h: N\to N'$

$$\begin{array}{ccc} M\times N & \longrightarrow & N \\ & \searrow & \downarrow h \\ & & N' \end{array}$$

命题: $\mathcal{C}$ 中存在始对象.

对 X, Y. 定义 R模

$$E = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i)\ \middle|\ a_i\in R,\ n\in\mathbb{N},\ x_i\in X,\ y_i\in Y\right\}$$

$F\subseteq E$ 由 $\left\{\begin{array}{l}(x_1+x_2, y_1) - (x_1, y_1) - (x_2, y_1) \\ a(x,y) - (ax, y) \\ \vdots\end{array}\right.$ 生成

$E/F := X\otimes Y = \{\sum x_i\otimes y_i\}$ 为始对象

注: $X\otimes Y$ 并不是所有元素都形如 $x\otimes y$

$$\begin{array}{ccc} X\times Y & \longrightarrow & N \\ & \searrow & \uparrow \exists! \\ & & E/F \end{array}$$

例. $R=K$. $X=Y=V$. $\dim V=2$.

$(av_1+bv_2)\otimes(cv_1+dv_2)$ 维数为 4

由 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & bd\end{pmatrix} = 1$ $\Rightarrow$ 只有 $\_\, v_1\otimes v_2 + \_\, v_2\otimes v_1 + \cdots$ $\mathrm{rank}(\cdots)=1$ 的可写成 $x\otimes y$

注2. $x\in X'\subseteq X$
$y\in Y'\subseteq Y$
$x\otimes y\in X'\otimes Y'$ 与 $x\otimes y\in X\otimes Y$

不一定相等.

$R=\mathbb{C}[x]$. $X = \langle x\rangle \subseteq R$
$Y = R/\langle x\rangle$

$R\otimes Y$ 中 $x\otimes 1 = 0$

$X\otimes Y$ 中 $x\otimes 1 \neq 0$

例. $R=\mathbb{Z}$, $\gcd(m,n)=1$: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$

(问 $\gcd(m,n)=d$
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong$?)

命题: $M_1\otimes(M_2\otimes M_3) \xrightarrow{\sim} M_1\otimes M_2\otimes M_3$
$\xrightarrow{\sim} (M_1\otimes M_2)\otimes M_3$

利用: $M_2\times M_3 \to M_1\otimes M_2\otimes M_3$

$\Rightarrow$ $M_2\otimes M_3 \to M_1\otimes M_2\otimes M_3$

$\Rightarrow$ $M_1\times(M_2\otimes M_3) \to M_1\otimes M_2\otimes M_3$

$\Rightarrow$ $M_1\otimes(M_2\otimes M_3) \to M_1\otimes M_2\otimes M_3$

再反过来走一遍

$M_1\times M_2\times M_3 \to M_1\otimes(M_2\otimes M_3)$

$\Rightarrow$ $M_1\otimes M_2\otimes M_3 \to M_1\otimes(M_2\otimes M_3)$

由此证明同构

命题. $R\otimes M \xrightarrow{\sim} M$

$R\times M\to M$

$\Rightarrow$ $R\otimes M\to M \to R\otimes M$ 同构映射

$r\otimes m \mapsto rm$
$m \longmapsto 1\otimes m$

命题. $M\otimes N \cong N\otimes M$

命题.
$$\begin{tikzcd} X_1\times X_2 \arrow[r, "(f_1,f_2)"] \arrow[d] & Y_1\times Y_2 \arrow[d] \\ X_1\otimes X_2 \arrow[r, "(f_1',f_2')"] & Y_1\otimes Y_2 \end{tikzcd}$$
图表交换

命题. $f, f_1, f_2: M'\to M$. $g, g_1, g_2: N'\to N$

$$\begin{cases} f\otimes(g_1+g_2) = f\otimes g_1 + f\otimes g_2 \\ (f_1+f_2)\otimes g = f_1\otimes g + f_2\otimes g \\ f\otimes(rg) = (rf)\otimes g = r(f\otimes g) \end{cases}$$

命题: 直和和张量积可以交换次序

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big)\otimes N \cong \bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes N)$$

若 $|I|<\infty$:

$(M_1\oplus M_2)\times N \longrightarrow (M_1\otimes N)\oplus(M_2\otimes N)$

$((x_1,x_2),y) \longmapsto ((x_1\otimes y),(x_2\otimes y))$

诱导. $\exists(\oplus)\otimes N \longrightarrow (\otimes)\oplus(\otimes)$

$$\begin{tikzcd} & (M_1\otimes N)\oplus(M_2\otimes N) \arrow[d, "\exists!"] & \\ M_1\otimes N \arrow[ur] \arrow[r] & (M_1\oplus M_2)\otimes N & M_2\otimes N \arrow[ul] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

需要构造

再验证. $fg = Id$. $gf = Id$

若 $|I|=\infty$

$\varphi: \bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes N) \longrightarrow (\bigoplus M_i)\otimes N$

$(x_i\otimes y_i)_i \longmapsto \sum_i (0,\cdots,x_i,0\cdots 0)\, y_i$

有限

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes N) \arrow[r, "\varphi"] & \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big)\otimes N \\ \bigoplus_{i\in I_0}(M_i\otimes N) \arrow[u] \arrow[r, "\sim"', "\varphi_{I_0}"] & \Big(\bigoplus_{i\in I_0} M_i\Big)\otimes N \arrow[u] \end{tikzcd}$$

I_0

推论: 利用 $R\otimes M \cong M$

若 N 是自由模

$N\cong \bigoplus_{i\in I} R$

则 $N\otimes M \cong \bigoplus_{i\in I} M$

$r\otimes m \mapsto rm$

$x\otimes rm$

$\mathbb{Z}\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$1\otimes\bar{1} \longleftrightarrow$ 生成元

$2\mathbb{Z}\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$2\otimes\bar{1} \longleftrightarrow$ 生成元

故 $2\otimes\bar{1}\neq 0$

推论. F_1, F_2 自由模

$$F_1\otimes F_2 \cong R^{\mathrm{rank}F_1\times\mathrm{rank}F_2}$$

特别地.

k-线性空间 V_1, V_2

$\dim(V_1\otimes V_2) = \dim V_1\cdot\dim V_2$

命题. $0\to A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\to 0$ 正合 $\Downarrow$ 正合

$A\otimes N\xrightarrow{f\otimes 1} B\otimes N\xrightarrow{g\otimes 1} C\otimes N\to 0$

$a\otimes x\longmapsto f(a)\otimes x$

$b\otimes x\longmapsto g(b)\otimes x$.

证. (1) $g_* = g\otimes 1$ 满

$\sum c_i\otimes x_i$

$c_i \xleftarrow{g} b_i$ 故 $g_*(\sum b_i\otimes x_i) = \sum c_i\otimes x_i$

(2) $\ker g_* = \mathrm{Im} f_*$

证 $B\otimes N/\mathrm{Im}f_* \xrightarrow{\bar{g}_*} C\otimes N$

满是显然的

$h: C\otimes N \longrightarrow B\otimes N/\mathrm{Im}f_*$

$c\otimes x \longmapsto b\otimes x + \mathrm{Im}f_*$

定义好的

且 $\bar{g}_* h$, $h\bar{g}_* = Id$

命题. $M/IM \cong (R/I)\otimes_R M$

证: $\bar{m} \longleftarrow (\bar{1}, m)$ 　 平是 $(\ )\leftarrow(\otimes)$

$M \to (R/I)\otimes_R M$

$IM \to 0$

⇒ 诱导 $M/IM \to (R/I)\otimes M$

$\bar{m} \longmapsto \bar{1}\otimes m$

可验证. 互逆. □

平坦模 　 $0\to A\to B\to C\to 0$

⇓ 若 N 为平坦模

$0\to A\otimes N\to B\otimes N\to C\otimes N\to 0$

等价. ① $M\to N\otimes M$ 正合函子

② $i: M'\to M$ 单 ⇒ $i_*: M'\otimes N\to M\otimes N$ 单

✓ ③ $M'\to M\to M''$

⇓ $M'\otimes N\to M\otimes N\to M''\otimes N$.

命题. (1) K 是平坦模

✓ (2) $F=\bigoplus_{i\in I} F_i$ 为平坦模 ⇔ F_i 均平坦

证. $A\to B$ 单.

$A\otimes F_i\to B\otimes F_i$ 单

$$\begin{tikzcd}
(\oplus F_i)\otimes A \arrow[r, "单"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & (\oplus F_i)\otimes B \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\oplus(F_i\otimes A) \arrow[r, "单"] & \oplus(F_i\otimes B) \\
F_i\otimes A \arrow[u] \arrow[r, "单\ \forall i"'] & F_i\otimes B
\end{tikzcd}$$

(3) 自由模 是平坦模

投射模 是平坦模 (自由模直和项)

命题 R. 整环. I 非平凡理想 　 $M\cong R/I$ 也不是

则 R/I 不是平坦模.

理由. $R \xrightarrow{单} \mathrm{Frac}R$

而 $R/I = R/I\otimes R$

$\underline{\mathrm{Frac}R\otimes(R/I) = 0}$

⇒ $(R/I)\otimes R \to 0$ 不是单射

引理. F 平坦模. $0\to N\to M\to F\to 0$ 正合

∀模 E. $0\to N\otimes E\to M\otimes E\to F\otimes E\to 0$ 正合

证: 取 L 为自由模. $0\to K\to L\to E\to 0$

$$\begin{tikzcd}
 & N\otimes K \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes K \arrow[r] \arrow[d] & F\otimes K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, "平坦"] & N\otimes L \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes L \arrow[r] \arrow[d] & F\otimes L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & N\otimes E \arrow[r, "证单"] \arrow[d] & M\otimes E \arrow[r] \arrow[d] & F\otimes E \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

平坦 0

命题 $0\to F'\to F\to F''\to 0$ 正合列. 且 F'' 平坦

F 平坦 ⇔ F' 平坦

证 取 $A\to B$ 单. 　 ↓平坦

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\otimes F' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A\otimes F \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A\otimes F'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, "引理"] & B\otimes F' \arrow[r] & B\otimes F \arrow[r] & B\otimes F'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

⇒ $0\to \ker f \xrightarrow{\cong} \ker g \to 0$

一般情况

$0\to F^0\to F^1\xrightarrow{f} F^2\to F^3\to 0$

$0\to \mathrm{Im}f\to 0$

F_3, F_2 平 ⇒ $\mathrm{Im}f$ 平 又 F_1 平 ⇒ F_0 平坦

定理. F 平坦模 ⇔ $\forall I\subseteq R$. $I\otimes F\cong IF$

E 固定. E' 为 ∀ 子模

引理1. $\forall E'\subseteq E$. 若 $E'\otimes F\to E\otimes F$ 单

则 ① $\forall E_1'\hookrightarrow E_2'$, $(E_1'\subseteq E_2'\subseteq E)$

$E_1'\otimes F\hookrightarrow E_2'\otimes F$ 单

② $M'\hookrightarrow M$ (M 为商模)

$M'\otimes F\hookrightarrow M\otimes F$ 单

证. ①
$$\begin{tikzcd}
E_1'\otimes F \arrow[r] \arrow[dr, "单"'] & E_2'\otimes F \arrow[d, "单"] \\
 & E\otimes F
\end{tikzcd}$$

②
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$N=\ker p$

$E'=\{x\in E \mid p(x)\in M'\}$

$\otimes F$ 操作

$$\begin{tikzcd}
 & F\otimes N \arrow[r] \arrow[d, equal] & F\otimes E' \arrow[r] \arrow[d] & F\otimes M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F\otimes N \arrow[r] & F\otimes E \arrow[r] & F\otimes M &
\end{tikzcd}$$

由蛇形引理

$F\otimes M'\to F\otimes M$ 单 □

引理2 $E=\bigoplus_{i\in I} E_i$. 对 $\forall E_i$
若 $\forall E_i' \hookrightarrow E_i$ 都有 $F\otimes E_i' \hookrightarrow F\otimes E_i$
则 $\forall E'$, $E'\hookrightarrow E$ 有 $F\otimes E' \hookrightarrow F\otimes E$

对 $|I|=2$. 设 $E=E_1\oplus E_2$

$E_1'=E_1\cap E'$. $E_2'=E_2\cap E'$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_1' \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & E_2' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & E \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\otimes F \Downarrow$

$$\begin{tikzcd} & E_1'\otimes F \arrow[r] \arrow[d] & E'\otimes F \arrow[r] \arrow[d] & E_2'\otimes F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E_1\otimes F \arrow[r] & E\otimes F \arrow[r] & E_2\otimes F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

此处由张量积与直和可互换次序.

故由蛇形引理. $E'\otimes F\to E\otimes F$ 为单

由归纳. 易证对 $|I|$ 有限成立

要证 $\alpha: F\otimes E' \to F\otimes E$ 单.

若 $x\in \ker\alpha$.

$x=\sum_j m_j\otimes x_j$.

x_j 落在有限个分量上.

对有限集 I_0. $x=0$. □

定理. F 平坦 $\Leftrightarrow$ $\forall I\subset R$. $I\otimes F\cong IF$

"$\Rightarrow$" $0\to I\to R\to R/I\to 0$

$\Downarrow$

$0\to I\otimes F\to R\otimes F\to (R/I)\otimes F$, $R\otimes F\cong F$

$\Rightarrow (R/I)\otimes F\cong F/(I\otimes F)$

$\cong F/IF$ 已知

$\Rightarrow IF\cong I\otimes F$

"$\Leftarrow$" $M'\hookrightarrow M$..

1. 将 $M=\oplus R/N$ 看成自由模商模

由引理1. 只需证 $E=\oplus R$ 成立

由引理2. 只需证 R 成立

R 的子模即理想 I.

只需证 $I\hookrightarrow R$ 有 $IF\cong I\otimes F\hookrightarrow R\otimes F\cong F$

□

基变换 $f: R\to S$ 环同态

则 S 模 M 具有 R 模结构

对 R 模 M. 可以

具有 S 模结构.

$S\otimes_R M =: M_S$

(此时 $ss'\otimes_R m = s(s'\otimes_R m)$)

例. $\pi: R\to R/I=\bar R$ 环同态

对 R 模 M.

$M_{\bar R}=\bar R\otimes_R M=(R/I)\otimes_R M$

$\cong M/IM$ 是 $\bar R$ 模

称为 M 模 I 的约化

例. R 整环 $i: R\hookrightarrow \mathrm{Frac}R=K$

R 模 M.

$M_K=K\otimes_R M$ 是 K-线性空间

可以数维数!

例1. 取 $I=\mathfrak{m}$ 极大 构成 $R/\mathfrak{m}$ 线性空间

例2 也是线性空间.

命题. M' R 模. M 是 S 模

$f: R\to S$ 环同态

存在 S 模同态 $M\otimes_S M'_S$

$M\otimes_S(M'\otimes_R S)\xrightarrow{\sim} M\otimes_R M'$

① 要验证是 S 模 (怎么作用?)

② 找到 S-双线性映射

推论: $R\to S\to T$ 环同态

$$M_T=T\otimes_R M\cong T\otimes_S M_S=T\otimes_S(S\otimes_R M)$$
$$=(M_S)_T$$

$R\to S$ 环同态

(1) 基变换：

F是平坦R模，则 $F_S = S\otimes_R F$ 是平坦S-模

(2) S是平坦R模，M是平坦S模 $\Rightarrow$ M是平坦R模

证(1) $M' \hookrightarrow M$ S模单

视为R模

$$\begin{array}{ccccc} \Rightarrow & M'\otimes_R F & \hookrightarrow & M\otimes_R F & 单 \\ & \wr\wr & & \wr\wr & \downarrow \\ & M'\otimes_S F_S & \longrightarrow & M\otimes_S F_S & 单 \end{array}$$

故 F_S 是平坦 S模

(2) $N' \hookrightarrow N$ R模单

由S平坦R模

$N'\otimes_R S \hookrightarrow N\otimes_R S$ S模单

$$\begin{array}{ccccc} \Rightarrow & M\otimes_S (N'_S) & \hookrightarrow & M\otimes_S N_S & 单. \\ & \wr\wr & & \wr\wr & \downarrow \\ & M\otimes_R N' & \longrightarrow & M\otimes_R N & 单 \end{array}$$
□

1.5 PID上有限生成模结构

R. 含幺交换环

M. R-模

$m\in M$. $\mathrm{ann}(m) = \{r\in R \mid rm=0\}$

是R的理想

若 $\mathrm{ann}(m)\neq 0$ 则 m称为扭元.

显然 $R/\mathrm{ann}(m) \cong \langle m\rangle$ R模同态

定义. $M_{tor} = \{m \mid m扭元\}$
$\exists r\neq 0\ rm=0$

命题：若R是整环 $M_{tor}\subseteq M$ 子模

注. R不是整环，则不一定有模结构

$R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = M$

$\bar{3}, \bar{4} \in M_{tor}$. 但 $\bar{3}+\bar{4} \notin M_{tor}$

定义. $M = M_{tor}$ 则 M 称为扭模

$M_{tor} = 0$ M 称为无扭模

命题 R 整环

(1) M/M_{tor} 是无扭模

(2) 若 $M\cong M'$. $\Rightarrow M_{tor}\cong M'_{tor}$.
$M/M_{tor} \cong M'/M'_{tor}$

(1) 显然,

(2) $\varphi: M \xrightarrow{\sim} M'$

则 $\varphi(M_{tor}) \subseteq M'_{tor}$

$\Rightarrow$ 诱导 $M_{tor}\to M'_{tor}$

同理 φ^{-1} 诱导 $M'_{tor}\to M_{tor}$
$\Rightarrow M_{tor}\cong M'_{tor}$

考虑 $\bar{\varphi}: M\to M' \to M'/M'_{tor}$

$m\in \ker\bar{\varphi}$
$\Leftrightarrow \varphi(m) \in M'_{tor} \Leftrightarrow m\in M_{tor}$

$\Rightarrow M/M_{tor} \cong M'/M'_{tor}$

注. 若 $\varphi: M\to M'$ 单

$\Rightarrow M_{tor}\to M'_{tor}$ 单

但 $\varphi: M\to M'$ 满

$\not\Rightarrow$ $M_{tor}\to M'_{tor}$ 满.

如.
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \to & 0 \\ \downarrow tor & & \downarrow tor & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \to & 0 \end{array}$$
不正合

有限生成无扭模 (R为PID)

引理. M由n个元素生成 R-模. 则 M的子模最多由n个元素生成.

$n=1$. M是循环模 $\langle m\rangle$

$\Rightarrow \langle m\rangle = M \cong R/I$. $(I=\mathrm{ann}(m))$

$\Rightarrow$ 子模 $S \cong J/I$. 也是循环模

$n+1$时. 取 $M'=\langle x_1,\cdots x_n\rangle$

$S\subseteq M$

有 $0\to S\cap M'\to S\to S/(S\cap M')\to 0$

由 $S\cap M'\subseteq M$. 故至多n个元素生成

而 $S/S\cap M' \cong S+M'/M' \subseteq M/M'$ 由一个元素生成

$\Rightarrow$ S 至多由 $n+1$ 个元素生成

定理. 有限生成无扭模是自由模

推论. F是有限生成自由R-模

$S\subseteq F$. 则S是自由模由 $\mathrm{rank}\,S\le \mathrm{rank}\,F$

特别地. 有限生成投射R-模是自由模

(利用子模无扭. 且生成元 ≤ 原模的生成元个数)

对投射.P. $0\to\ker f\to F\to P\to 0$

F取生成元的自由模 $\Rightarrow P \overset{\text{同构}}{\subseteq} F$.

归纳证明定理.

$n=1$. $R\cong M=\langle v_1\rangle$.

$n+1$时 $M=\langle v_1,\cdots v_{n+1}\rangle$

$M'=\{m\in M \mid \exists\, 0\ne r\in R.\ rm\in\langle v_{n+1}\rangle\}$

下面验证 $0\to M'\to M\to M/M'\to 0$

M'自由, M/M' 无扭.

再利用 M/M' 无扭 $\Rightarrow$ 自由 $\Rightarrow$ 投射

$\Rightarrow M\cong M'\oplus M/M'$ 是自由模

M/M' 无扭 易证.

M' 自由: $x\in M'$. $rx=av_{n+1}$

$\varphi: M'\to K=\mathrm{Frac}\,R$

$x\mapsto \frac{a}{r}$.

φ单. 定义好. $\Rightarrow$ 由 M'有限生成 $\Rightarrow \varphi(M')$ 有限生成

即 $\varphi(M')$ 有限生成无扭子模

设 $D=\langle \frac{b_1}{c_1},\cdots \frac{b_m}{c_m}\rangle$. 取 $c=\prod_{i=1}^{m}c_i$

$\Rightarrow f: D\to R$ 是单同态

$d\mapsto cd$

$\Rightarrow D\cong I=aR$. 是秩为1的自由模

推论 M有限生成R模

(1) $M\cong (M/M_{tor})\oplus M_{tor}$

其中 M/M_{tor} 是有限生成自由R模

(2) $M\cong M'$ $(\Leftrightarrow)$

$M_{tor}\cong M'_{tor}$,

$\mathrm{rank}(M/M_{tor})=\mathrm{rank}(M'/M'_{tor})$

推论 PID上 平坦模 $\Leftrightarrow$ 无扭模

引理: 若M的所有有限生成子模是平坦模. 则M也是平坦模

对 $0\to N'\xrightarrow{i} N$

证 $M\otimes N'\to M\otimes N$ 单.

$i_*(\alpha)=0$

即 $\sum i_*(m_i\otimes n_i)=0$

$\Rightarrow \sum m_i\otimes n_i = 0$

取. $M'=\langle m_i\rangle$ 有限. 子模

$\therefore \alpha\in\ker(M'\otimes N'\xrightarrow{\text{单}} M'\otimes N)$ 单.

$\therefore \alpha=0 \Rightarrow$ 单.

推论的证明:

"$\Leftarrow$" 有限生成子模是自由模

"$\Rightarrow$" $0\ne m\in M_{tor}$

$R\to \mathrm{Frac}\,R$ 单

$\Rightarrow R\otimes M\to K\otimes M$ 单

$m\otimes 1 = rm\otimes\frac{1}{r}=0$ 矛盾

定理. F 自由 R 模 $H \subseteq F$

则 H 是自由模. $\operatorname{rank} H \leq \operatorname{rank} F$

特别地. 投射模 $\Leftrightarrow$ 自由模

R 为 PID

有限生成模:

自由模 $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ 投射模 $\Leftrightarrow$ 平坦模 $\overset{②}{\Leftrightarrow}$ 无扭模 ③

推广一般情况

自由模 $\Leftarrow$ 投射模 $\Rightarrow$ 平坦模 $\Rightarrow$ 无扭模

---

p-准素模: $p = (p) \leq R$ 素, 极大

M. $\forall m \in M$. $\exists n$. $p^n M = 0$

$\forall$ 模 M. 其 p-准素部分

$M_p = \{ m \in M \mid \exists n, p^n m = 0 \} \overset{子模}{\leq} M$

命题. 若 M 是扭模

$$M = \bigoplus_{p \neq 0} M_p$$

$\subseteq$: $m \in M$. $\operatorname{ann}(m) = (d)$

$d = u\, p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$

取 $r_i = \frac{d}{p_i^{e_i}}$ 由 $p_i^{e_i}(r_i m) = 0$

$\Rightarrow r_i m \in M_{p_i}$

再由 $\gcd(r_1, \cdots r_n) = 1$

$\Rightarrow \sum s_i r_i = 1$

$\Rightarrow m = \sum s_i r_i m \in \sum M_{p_i}$

$\oplus$: $H_p = \langle M_{p'} \mid p' \neq p \rangle$

证 $H_p \cap M_p = 0$

$m \in H_p \cap M_p$

$\because m \in M_p \Rightarrow p^l m = 0$

又 $m = \sum_{i \neq p} m_i$, $q_i^{l_i} m_i = 0$

取 $w = \prod_{i \neq p} q_i^{l_i}$. $(w, p) = 1$

$\Rightarrow m = 0$ $\square$

推论. M. M' 为扭模

若 $M \cong M'$ 则 $\forall p$. $M_p \cong M'_p$

Thm. M 有限生成 p-准素模.

$M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} R/p^{e_i}$

由此. 对. $\forall$ 有限生成 R 模 M

$M \cong R^r \oplus (\bigoplus_{p \neq 0} M_p) \cong R^r \oplus (\bigoplus_{p \neq 0} (\bigoplus_{i=1}^{i_p} R/p^{e_i}$

为了数清"维数". 故定义:

$k_p = R/p$ 为域. M/pM 视为 k_p 模

$d_p(M) = \dim_{k_p}(M/pM)$

例. $d_p(R) = \dim_{k_p}(R/pR) = 1$

$d_p(R/p) = \dim_{k_p}(R/p \,|\, \underbrace{p \cdot R/p}_{=0}) = 1$

$d_p(R/p^e) = \dim_{k_p}(R/p^e \,|\, p \cdot R/p^e) = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} R/p^e \text{ 基: } \{1, p, \cdots p^{e-1}\} \\ pR/p^e \text{ 基: } \{p, \cdots p^{e-1}\} \end{array}}$$

$$\boxed{d_p(p^n \cdot R/p^e) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < e \\ 0 & n \geq e \end{cases}}$$

(利用 $0 \to p^{e-n}/p^e \to R/p^e \to p^n R/p^e \to 0$

即 $p^n \cdot R/p^e \cong R/p^{e-n}$)

$d_p(R/q) = 0$ $(p \neq q)$

($\because$ 基本元改变)

定义 $U_p(n, M) = d_p(p^{n-1} M) - d_p(p^n, M)$

易证 $\boxed{U_p(n, R/p^e) = \begin{cases} 1 & (n = e) \\ 0 & \end{cases}}$

注: $d_p(M) = 0 \Leftrightarrow M = pM \Leftrightarrow M_p = 0$

引理. 设 $M\neq 0$. 有限生成 p准素, $p^{n-1}M\neq 0$. $p^nM=0$. 设 $0\neq x\in M$.

$p^{n-1}x\neq 0$. $p^n x=0$ 令 $M_1=\langle x\rangle$. 则

(1) $\forall i\geq 1$. $M_1\cap p^iM=p^iM_1$

(2) $d_p(M)=d_p(M_1)+d_p(M/M_1)=1+d_p(M/M_1)$

证(1) 对 $y=mp^tx=p^iu\in M_1\cap p^iM$

要证 $y=p^iu'$ $u'\in M_1$

$i\geq n$ 或 $t\geq i$ 时 显然都存在

在 $t<i<n$ 时

$p^{n-i}y=\underset{\neq 0}{mp^{n-i+t}x}=p^nu=0$ 矛盾

(2) $\dfrac{M/M_1}{p(M/M_1)}=\dfrac{M/M_1}{(pM+M_1)/M_1}\cong M/(pM+M_1)$

$\cong\dfrac{M/pM}{(pM+M_1)/pM}$

而 $(pM+M_1)/pM\cong M_1/(pM\cap M_1)=M_1/pM_1$ ∎

注 $0\to p^n\to R\to M_1\to 0$

$\Rightarrow R/p^n\cong M_1=\langle x\rangle$

Thm 的证明.

对 $d_p(M)$ 归纳 $=1$ 时

取 $x\in M$. 且 $0\neq\bar{x}\in M/pM$ $\overset{\text{有设}}{\Rightarrow}$ $p^nx=0$, $p^{n-1}x\neq 0$

对 $y\in M$. $y-a_0x\in pM\Rightarrow y=a_0x+py_1$

$\Rightarrow y_1-a_1x\in pM\Rightarrow y_1=a_1x+py_2$

$\vdots$

$\Rightarrow y=(a_0+a_1p+\cdots+a_{n-1}p^{n-1})x$

故 M 由 x 生成. $M\cong R/p^n$

法2. 由 $d_p(M)=1+d_p(M/M_1)=1$

$\Rightarrow (M/M_1)_p=0\Rightarrow M=M_1\cong R/p^n$

$\leq k$ 时 成立. $M_0=\langle x_0\rangle$. $\begin{cases}p^nx_0=0\\ p^{n-1}x_0\neq 0\end{cases}$

由 $d_p(M/M_0)<d_p(M)$

$\Rightarrow M/M_0\cong\bigoplus_{i=1}^{q}\langle\bar{x}_i\rangle$.

$M_0\cong R/p^n$

设 p^{n_i} 是 $\bar{x}_i$ 的阶

并取 y_i 为 $\bar{x}_i$ 的一个原像

$\Rightarrow p^{n_i}y_i\in M_0\cap p^{n_i}M=p^{n_i}M_0$

$\Rightarrow p^{n_i}y_i=p^{n_i}rx_0$

$\Rightarrow x_i=y_i-rx_0$ 也是 $\bar{x}_i$ 原像.

且阶为 p^{n_i}

$\Rightarrow M_i=\langle x_i\rangle\cong R/p^{n_i}$

$\Rightarrow M=\langle x_0,x_1,\dots,x_q\rangle$

对 $r_0x_0+\cdots+r_qx_q=0$

模M_0 $r_1\bar{x}_1+\cdots+r_q\bar{x}_q=\bar{0}$

$\Rightarrow p^{n_i}\mid r_i$

$\Rightarrow r_ix_i=0$ ($\because$ x_i 的阶$\mid r_i$)

$\Rightarrow$ 直和

注: R/p^e 出现个数 $=U_p(e,M)$ 可定义

$\Rightarrow$ Thm. PID上有限生成模

$M\cong R^r\oplus\bigoplus_{p\text{素}\neq 0}\bigoplus_{n\geq 1}(R/p^n)^{U_p(n,M)}$

去掉 $U_p(n,M)=0$ 的项

$M\cong R^r\oplus\bigoplus_{i=1}^{s}\bigoplus_{j=1}^{j_i}R/p_i^{e_{ij}}$

按大小排列. 初等因子

$p_1^{e_{11}}\ p_1^{e_{12}},\dots\ p_1^{e_{1j_1}}$ $\quad e_{11}\geq\cdots\geq e_{1j_1}$

$\vdots$

$p_s^{e_{s1}}\ \dots\ p_s^{e_{sj_s}}$ $\quad e_{s1}\geq\cdots\geq e_{sj_s}$

令 $c_1=p_1^{e_{11}}\cdots p_s^{e_{s1}}$. $c_j=p_1^{e_{1j}}\cdots p_s^{e_{sj}}$

$\Rightarrow c_{\text{最后}}\mid\cdots\mid\cdots\mid c_1$

$\{c_i\}_{i=1}^{t}$ 称为不变因子

由中国剩余定理. $R/\langle c_j\rangle=\bigoplus_{i=1}^{s}R/p_i^{e_{ij}}$

推论 $M_{tor}\cong R/c_1\oplus\cdots\oplus R/c_t$

对 $\operatorname{ann}(M)=\bigcap_{m\in M}\operatorname{ann}(m)=(c_1)$

从模论观点看 Smith 标准形.

对 PID 上 有限生成模 M.

正合列. $0 \to \underset{R^m}{\overset{}{\ker}} \xrightarrow{\psi} R^n \xrightarrow{\phi} M \to 0$ ($\ker \cong R^m$)

取 R^m 的基. $\{f_1, \cdots f_m\}$

R^n 的基 $\{e_1, \cdots e_n\}$

将 M 看成 $\operatorname{coker}\psi = R^n / \operatorname{Im}\psi$

设 $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$

$\Rightarrow (f_1 \cdots f_m) = (e_1, \cdots e_n) \, (A)$.

认为 $M = R^n/\ker = \langle e_1, \cdots e_n \mid (e_1, \cdots e_n) A = \vec{0} \rangle$

换基: 对 $(e_1' \cdots e_n')$, $(f_1' \cdots f_m')$ 另一组基

$(f_1' \cdots f_m') = (f_1, \cdots f_m) P$

$(e_1' \cdots e_n') = (e_1 \cdots e_n) Q$

$\Rightarrow$ 在新基下. A 为 $Q^{-1}AP$

ED下. 任 $n \times m$ 矩阵 A 可相抵成

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots \; d_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$ 形式. $d_1 \mid d_2 \mid d_3 \cdots \mid d_r$

注: 可逆矩阵 是初等方阵的乘积,

由此. $\boxed{\begin{array}{l} M \cong R^{n-r} \oplus R/(d_1) \oplus \cdots \oplus R/(d_r) \\ \{d_1, \cdots d_r\} \text{ 为 } M \text{ 的不变因子} \end{array}}$

$R = k[x]$ 模时. 设 V 是 k-线性空间. 基 $\{e_1, \cdots e_n\}$

$k[x]$ 模 V^T. 有 $f(x).v = f(T)v$

对 $V[x] = \{\sum_{i \geq 0} x^i v_i \mid v_i \in V\}$

做 R 模结构.

$(f(x), \sum_{i \geq 0} x^i v_i) \longmapsto \sum_{i \geq 0} f(x) x^i v_i = \cdots$

可认为 $\boxed{V[x] \text{ 是由 } \{e_1, \cdots e_n\} \text{ 生成的自由 } k[x]\text{-模}}$

$= R^n$

Thm

$0 \to V[x] \xrightarrow{\lambda} V[x] \xrightarrow{\pi} V^T \to 0$ 正合

其中 λ: $x^i v \longmapsto x^{i+1} v - x^i T(v)$

π: $x^i v \longmapsto T^i v$.

且 λ 在基 $\{e_1, \cdots e_n\}$ 下的矩阵是 $xI - A$

① π 满: $v \in V^T$

$\pi(x^0 v) = v$

② $\operatorname{Im}\lambda \subseteq \ker\pi$

③ $u = \sum_{i=0}^{m} x^i v_i \in \ker\pi$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} T^i(v_i) = 0 \Rightarrow u = \sum_{i=0}^{m} (x^i v_i - T^i(v_i))$

由 $x^i v_i - T^i(v_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \lambda(x^{i-1-j} T^j(v_i)) \in \operatorname{Im}\lambda$

$\Rightarrow \ker\pi \subseteq \operatorname{im}\lambda$

④ $u = \sum_{i=0}^{m} x^i v_i \in \ker\lambda$. 若 $u \neq 0$

设 $x^m v_m \neq 0 \Rightarrow x^{m+1} v_m \neq 0$

而 $\lambda(u) = 0 \Rightarrow$ 最高次 x^{m+1} 的系数 $v_m \neq 0$ 矛盾. □

推论. A, B 相似 $\Leftrightarrow$ $xI - A$ 与 $xI - B$ 相抵

设 $T_1: V \to V$ 在 $\langle e_1, \cdots e_n \rangle$ 基的矩阵为 A

$T_2: V \to V$ — — B

λ_{T_1}, λ_{T_2} 为 $xI - A$, $xI - B$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V[x] \arrow[r, "\lambda_{T_1}"] \arrow[d, "Q^{-1}"] & V[x] \arrow[r, "\pi_{T_1}"] \arrow[d, "P"] & V^{T_1} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & V[x] \arrow[r, "\lambda_{T_2}"] & V[x] \arrow[r] & V^{T_2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由前两列同构 $\Rightarrow$ 同构映射

$\Rightarrow$ A 与 B 相似.

考虑 $xI - A$ 的史密斯标准形.

V 作为 $k[x]$-模. (设 V 有限维)

$V^T \cong k[x]/(c_1) \oplus \cdots \oplus k[x]/(c_r)$

即 $xI - A \underset{\sim}{\text{相抵}} \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_r \end{pmatrix}$ 形式

此外 $c_1 \cdots c_r = \det(xI - A)$

c_r 是 A 的最小多项式

$\{c_1, \cdots c_r\}$ 是 A 的不变因子